动力学

引言

在静力学中，我们研究了力系的简化和平衡问题，但没有研究物体在不平衡力系作用下将如何运动。在运动学中，我们仅从几何的角度描述了物体的运动规律及其特征，并未涉及物体的质量（Mass）及其所受的力。因此，静力学和运动学都是从不同的侧面研究了物体的机械运动。

动力学（Dynamics）则将对物体的机械运动进行全面的分析，不仅分析物体的受力和物体的运动，而且通过动力学定理将二者联系起来。因此，动力学是研究物体的机械运动与作用力之间关系的科学。

动力学研究的两类力学模型是：质点（Particle）和质点系（System of particles）。所谓质点，是指具有一定质量而几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体。例如，在研究地球环绕太阳的运行规律时，就可以不考虑地球的大小尺寸而把它抽象为一个质量集中于质心（Center of mass）的质点。由有限个或无限个有一定联系的质点所组成的系统，称为质点系。这样，任何物体（包括固体、液体、气体）都可以看作是某个质点系。刚体是各质点之间距离保持不变的特殊质点系。

动力学可分为质点动力学和质点系动力学，前者是后者的基础，而后者是具有的重点。

第十章　质点运动微分方程

本章根据动力学基本定律得出质点动力学的基本方程，运用微积分方法，求解一个质点的动力学问题。

10-1 动力学基本定律

动力学基本定律是牛顿（1642-1727）在总结前人特别是伽利略的研究成果的基础上在他的著作《自然哲学的数学原理》中明确提出来的，称为牛顿三定律。这些定律是研究动力学的基础。

第一定律（惯性定律）

不受任何力作用的质点，将保持静止或作匀速直线运动。首先，定律指出不受力作用的质点（包括受平衡力系作用的质点），不是处于静止状态，就是保持匀速直线运动，这种性质称为惯性（Inertia）。第一定律阐述了物体作惯性运动的条件，故又称为惯性定律。其次，定律还指出，若质点的运动状态发生改变，必定是受到其他物体的作用，这种机械作用就是力。

第二定律（力与加速度之间的关系定律）

质点的质量与加速度的乘积，等于作用于质点的力的大小，加速度的方向与力的方向相同。

该质点 M 的质量为 m，所受的力为 $\boldsymbol{F}$，由于力 $\boldsymbol{F}$ 的作用所产生的加速度为 $\boldsymbol{a}$，如图 10-1 所示。于是，此定律可表示为

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \qquad (10\text{-}1)$$

（10-1）式称为质点动力学基本方程。当质点力同时受各个力作用时，（10-1）式右端的 $\boldsymbol{F}$ 应理解为是这些力的合力。即，$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}$ 。

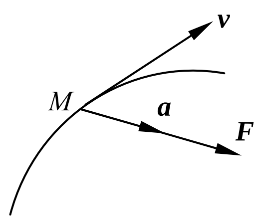


图　10-1

由该定律可知，以同样的力作用在不同质量的质点上，质量愈大的质点获得的加速度愈小，也就不易改变它的运动状态。这就说明了较大的质量具有较大的惯性。因此，质量是质点惯性的度量。

力与加速度是瞬时关系，即只要某瞬时有力作用于质点，则在该瞬时必有确定的加速度；没有力作用于质点，质点就没有加速度。

在地球表面，物体受重力 $\boldsymbol{P}$ 作用而产生的自由落体加速度 $\boldsymbol{g}$ 称为重力加速度。设物体的质量为 m，根据第二定律则有：

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} \qquad 或 \qquad m = P / g \qquad (10\text{-}2)$$

由于物体质量是不变的，地面各处的重力加速度 g 值略有不同，因而物体的重量在地面各处稍有差异。在一般工程实际中，可以认为 g 是常数，并取 $g = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$

在国际单位制中，以质量，长度和时间的单位作为基本单位。质量的单位为千克（kg）,长度的单位为米（m），时间的单位为秒（s）.力的单位是导出单位，即使质量为 1 kg 的物体的物体获的 1 m / s^2 的加速度的力，称为 1 牛顿（N）。即：

1 N=1 kg × 1m / s^2

第三定律（作用与反作用定律）

两质点相互作用的力，总是大小相等，方向相反。沿着同一直线，分别作用在这两质点上。

这个定律已在静力学中讨论过。它不仅适用二平衡的物体，而且也适用于任何运动的物体。在动力学问题中，这一定律仍然是分析两个物体相互作用关系的依据。

动力学基本定律中所说的静止，速度，加速度等都只是相对于某种参考系而言的。使动力学基本定律正确成立的参考系称为惯性参考系。在一般的工程技术问题中，如果忽略地球的自转和公转而不致带来大的误差时，可以近似地把固结于地球上的参考系看作惯性参考系。在以后如无特别说明，我们均取固定在地球上的参考系作为惯性参考系。

以牛顿三定律为基础的力学，称为牛顿力学或经典力学。在经典力学范畴内，认为质量是不变，空间和时间是“绝对的”与物体的运动无关。这种形而上学的理解是错误的。近代物理己证明，质量，时间和空间都与物体运动速度有关。当物体运动速度远小于光速时，物体的运动对于质量，时间和空间的影响是微不足道的，对一般工程中的机械运动问题，应用经典力学可以得到足够精确的结果。因此，在现代工程技术中仍占有主要的地位。而当物体运动的速度接近于光速或所研究的现象涉及物质的微观世界时，所引出的许多经论便与实验室完全不符，则需应用相对论力学或量子力学。

因此，经典力学适用于宏观物体和速度低于光速度的运动问题。

10-2 质点运动微分方程

牛顿第二定律，建立了质点的加速度与作用力的关系。当质点受到 n 个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用时，式（10-1）写成

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} \qquad (10\text{-}3)$$

将式（10-3）中的加速度表示为位置参数的系数形式，就得到各种形式质点运动微分方程。

1．质点运动微分方程的矢量形式

设质点 M 的质量为 m，作用于其上的合力 $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}$，矢径为 $\boldsymbol{r}$，加速度为 $\boldsymbol{a}$,如图，10-2 所示。

由运动学知： $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

代入式（10-3）得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum \boldsymbol{F} \qquad （10\text{-}4）$$

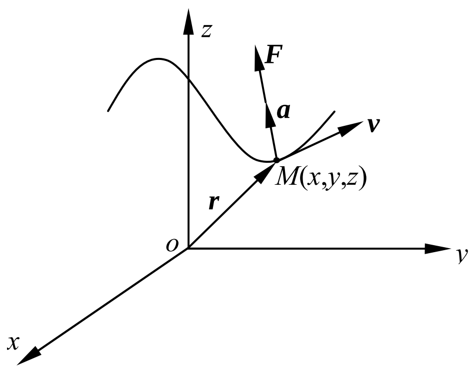


图 10-2

式（10-4）即为质点运动微分方程的矢量形式。

2．质点运动微分方程的直角坐标形式。

把式（10-4）投影到直角坐标系 $Oxyz$ 的各轴上（见图 10-2），并注意到 $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x''$，

$a_y = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = y''$，$a_z = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = z''$，$F_x = \sum F_x$，$F_y = \sum F_y$，$F_z = \sum F_z$，则得到质点运动微分方程的直角坐标形式：

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= \sum F_x \\ my'' &= \sum F_y \\ mz'' &= \sum F_z \end{aligned}\right\} \tag{10-5}$$

3．质点运动微分方程的自然坐标形式

设已知质点 M 的轨迹曲线如图 10-3 所示。以轨迹曲线上质点所在处为坐标原点，取自然轴系，并把式（10-3）向各轴投影，由运动学知：$a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \qquad a_b = 0$

$F_\tau = \sum F_\tau$，$F_n = \sum F_n$，$F_b = \sum F_b$ 分别表示力 $\boldsymbol{F}$ 自然轴系上的投影，于是可得，

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= m\frac{d^2 s}{dt^2} = \sum F_\tau \\ ma_n &= m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_n \\ ma_b &= 0 = \sum F_b \end{aligned}\right\} \tag{10-6}$$

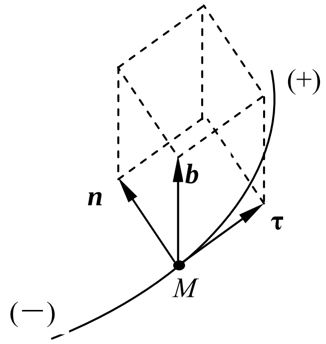


图　10-3

式（10-6）称为质点运动微分方程的自然坐标形式。在运动轨迹已知的情况下，采用自然形式的方程往往是方便的。

10-3 质点运动力学的两类基本问题

应用质点运动微分方程可以求解质点动力学的两类基本问题：

第一类问题——已知质点的运动规律，求作用于质点上的力。

这类问题一般比较简单，如已知质点运动的加速度，将其代入相应的微分方式程，就可求出作用于质点上的力；如已知质点的运动轨迹，选择相应坐标系，列出质点的运动方程，运用微分运算，使可求得加速度在坐标轴上的投影，由质点运动微分方程求出要求的力。因此，求解第一类问题归结为微分问题。

第二类问题——已知作用在质点上的学，求质点的运动。

这类问题的求解归结为质点运动微分方程的积分。如作用于质点上的力是常力，或力为时间，位置坐标，速度的简单函数，积分一般不会有困难；如果该函数关系比般复杂，会使积分计算遇到困难，甚至有时只能求得近似解。此外，要确定积分常数，还需给出质点运动的初始条件，即质点 $t = 0$ 时的初始位置，初始速度等。

下面举例说明这两类问题有求解方法和步骤。

例10-1　　小球质量为 m，悬挂于长为 l 的细绳上，绳重不计。小球在铅垂面内摆动时，在最低处的速度为 v，摆到最高处时，绳与铅垂线夹角为 φ，如图 10-4 所示，此时小球速度为零。试分别计算小球在最低与最高位置时绳的拉力。

解　　小球作圆周运动，受有重力 $\boldsymbol{P} = m\,\mathbf{g}$ 和线的拉力 $\boldsymbol{F}$ 作用，在最低处有法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{l}$,由质

点运动微分方程沿法向投影式，有

$$F_1 - mg = ma_n = m\frac{v^2}{l}$$

则绳的拉力 $$F_1 = mg + m\frac{v^2}{l} = m(g + \frac{v^2}{l})$$

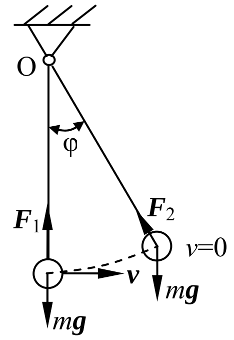


图 10-4

小球在最高处φ角时，速度为零，法向加速度为零，则其运动微分方程沿法向投影式为

$$F_2 - mg\cos\varphi = ma_n = 0$$

则绳的拉力

$$F_2 = mg\cos\varphi$$

例 10-2 设质点 M 在固定平面内运动如图 10-5 所示，已知质点的质量是 m，运动方程是

$$x = a\cos\omega t \qquad y = b\sin\omega t$$

其中，a，b 和 ω 都是常量，求作用于质点的力 $\boldsymbol{F}$。

解 这是一个自由质点的平面运动问题，小球只有按某一特殊规律变化的主动力作用下和特定的初始条件下，才能实现题设的运动。

分析 小球在任一瞬时所受力。因主动力未知，可假设它在坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y，将小球的运动方程求导，求出 M 点的加速度在固定坐标轴上的投影

$$x'' = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$$
$$y'' = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y$$

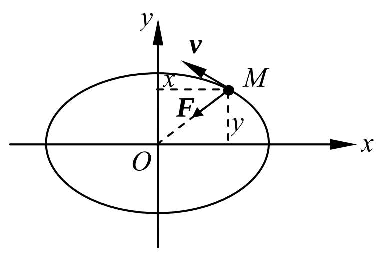


图 10-5

再由式（10-5）求得作用力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影

$$F_x = mx'' = -\omega^2 mx$$
$$F_y = my'' = -\omega^2 my$$

故，力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \omega^2 m\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 mr$$

式中，r 是质点 M 到原点 O 的距离（称为极距），$\boldsymbol{F}$ 的余弦方向是

$$\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r} \qquad \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

最后，作用力 $\boldsymbol{F}$ 可表示成

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} = -\omega^2 m(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\omega^2 m\boldsymbol{r}$$

可见，力 $\boldsymbol{F}$ 与 M 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反，也就是说 $\boldsymbol{F}$ 指向原点 O。这种作用线恒通过固定点的力称为有心力。而这个固定点则称为力心。

以上两例都是动力学的第一类基本问题，由此可归纳出求解第一类问题的步骤如下：

（1） 取研究对象并视为质点；

（2） 分析质点在任一瞬时的受力，并画出受力图；

（3） 分析质点的运动，求质点的加

（4） 列质点的运动微分方程并求解。

质点动力学第二类问题的解题步骤基本上与上述步骤相似，但是由于作用于质点的力可能是常力，也可能是时间，速度，距离等的函数，在求解时要注意积分的方法，以及利用初始条件确定积分常数。

例 10-3　以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 自地球表面竖直向上发射一质量为 m 的火箭如图 10-6 所示，不计空气阻力，火箭所受引力 $\boldsymbol{F}$ 之大小与它到地心的距离平方成反比，求火箭能到达的最大高度。

解（1）取火箭为对象，视为质点。

（2）受力分析，火箭在任意位置 x 处（如图 10-6），仅受地球引力 $\boldsymbol{F}$ 作用。由题意知，$\boldsymbol{F}$ 的大小与 x^2 成反比，设 u 为比例系数，则有

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{u} / x^2 \qquad \text{(a)}$$

当火箭处于地面时，即 $x = R$ 时 $F = mg$,可得 $\mathrm{u} = mgR^2$,于是由式（a）得

$$F = mgR^2 / x^2 \qquad \text{(b)}$$

（3）列运动方程求解，由于火箭作直线运动，可得火箭的直线运动微分方程式为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mgR^2 / x^2 \qquad \text{(c)}$$

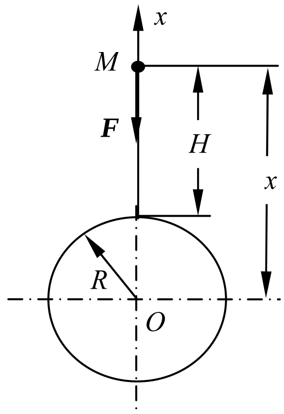


图　10-6

由于力 $\boldsymbol{F}$ 是坐标 x 的函数，可用分离变量方法积分式（c），注意到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

式（10-3）成为

$$mv\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mgR^2 / x^2$$

即

$$v\cdot \mathrm{d}v = -gR^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad \text{(d)}$$

根据题意及所选坐标轴，初始条件为：当 $t = 0$ 时，$x = R$，$v = v_0$；当火箭到最大高度 H 时，$x_{\max} = R+H$，$v = 0$；对式（d）积分得

$$\int_{v_0}^{0} v\,\mathrm{d}v = \int_{R}^{R+H} -gR^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

得

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)$$

于是，解出火箭能达到的高度 H 为

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} \qquad \text{(e)}$$

讨论　欲使火箭脱离地球引力，所需的初速度 v_0 应多大？欲使火箭不受地球引力作用，必须要求 $x = R+H \to \infty$，由于 R 为常量，由式（e）知，即要求

$$2gR - v_0^2 = 0$$

即

$$v_0 = \sqrt{2gR} \qquad \text{(f)}$$

将 $g = 9.8\times10^{-3}\,\mathrm{km/s^2}$ 及 $R = 6370\mathrm{km}$ 代入式（f）得

$$v_0 = 11.2\ \mathrm{km/s}$$

这就是火箭脱离地球引力所需的最小发射速度，称为第二宇宙速度或逃逸速度。

例 10-4 在重力作用下以仰角 α 初速 v_0 抛射一物体。假设空气阻力与速度一次方成正比，与速度方向相反，$\boldsymbol{R} = -\gamma\boldsymbol{v}$，$\gamma$ 为阻力系数，求抛射体的运动方程。

解：这是二个自由度的平面曲线运动。求质点的运动方程，属于第二类问题。

（1） 视物体为质点，作为研究对象。

（2） 受力分析：质点在任意位置处（见图 10-7），受重力 **P** 和阻力 **R** 作用。

（3） 列运动微分方式程式求解。取图示坐标系，质点的运动微分方程为

$$mx'' = -R\cos\theta = -\gamma v\cos\theta = -\gamma x'$$

$$my'' = -R\sin\theta - P = -\gamma v\sin\theta - mg = -\gamma y' - mg$$

令 $\beta = \dfrac{\gamma}{m}$，得

$$\left.\begin{aligned} x'' + \beta x' &= 0 \\ y'' + \beta y' &= -g \end{aligned}\right\} \qquad \text{（a）}$$

其一般解为

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-\beta t} \\ y &= D_1 + D_2 e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}t \end{aligned}\right\} \qquad \text{（b）}$$

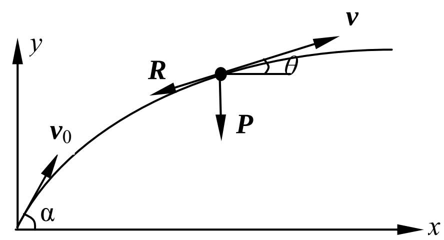


图 10-7

由初始条件确定积分常数：当 $t = 0$ 时，有 $x = 0$，$y = 0$，$x' = v_0\cos\alpha$，$y' = v_0\sin\alpha$，代入（b）式得

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 & \qquad 0 &= D_1 + D_2 \\ -\beta C_2 &= v_0\cos\alpha & \qquad -\beta D_2 - \frac{g}{\beta} &= v_0\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{（c）}$$

联解式（c）得 $$C_1 = -C_2 = \frac{v_0\cos\alpha}{\beta} \qquad D_1 = -D_2 = \frac{v_0\sin\alpha + g/\beta}{\beta} \qquad \text{（d）}$$

将式（d）代入式（b），得运动方程

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{v_0\cos\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \\ y &= \frac{v_0\sin\alpha + g/\beta}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) - \frac{gt}{\beta} \end{aligned}\right\}$$

这就是质点的运动方程，也可看成以 t 为参数的轨迹方程式。

例 10-5 图 10-8a 所示一弹性杆，下端固定，上端有一质量为 m 的物块，使其质量块偏离原位置 a 后释放，质量块在杆的弹性恢复下开始振动，杆的质量不计，试求质量块的运动规律。

解 取质量块为研究对象，并视其为质点，质量块沿 x 方向作直线运动，杆对质量块的作用相当于一弹簧，图 10-8b 是该系统的计算模型。

当质量块偏离平衡位置时，受到的弹簧力恒与质量块的运动方向相反，且与位移成正比。设弹簧刚度系数为 k，任意位置时弹性力的大小为

$$\boldsymbol{F} = -kx$$

由式（10-5）得 $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad \text{（a）}$$

作如下变换

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$$

并记　　$\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$

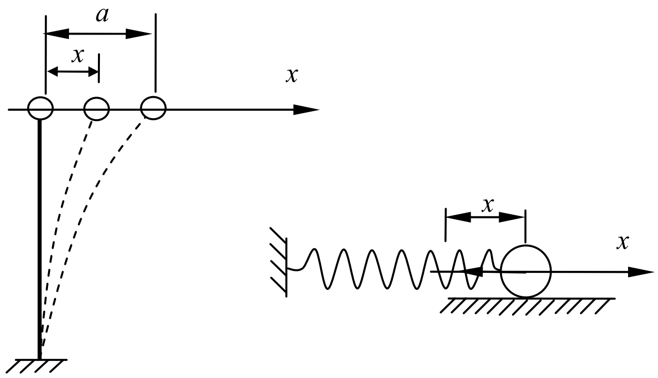
代入式（a）后分离变量得

$$v_x \,\mathrm{d}v_x = -\omega_n^2 x \,\mathrm{d}x$$

作定积分，注意到初始条件，

$t = 0$，$v_0 = 0$，$x_0 = a$

得到　　$v_x = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$　　（b）



（a）　　（b）

图　10-8

再用 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 代入式（b）并分离变量得　　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \omega \mathrm{d}t$

作定积分得　　$x = a\cos\omega t$　　（c）

式（c）就是质量块的运动方程，可见质量块的运动为简谐振动。