第十一章　动量定理

对于质点系，可以逐个质点列出其动力学基本方程，但是很难联立求解。

动量、动量矩和动能定理从不同的侧面揭示了质点和质点系总体的运动变化与其受力之间的关系，可用以求解质点系动力学问题。动量、动量矩和动能定理统称为动力学普遍定理。本章将阐明及应用动量定理。

11-1　动量与冲量

1．动量（Momentum）

物体运动的强弱，不仅与它的速度有关，而且还与它的质量有关，例如一颗高速飞行的子弹，虽然它的质量很小，但是却具有很大的冲击力，当遇到障碍时，足以穿入甚至穿透该障碍，轮船靠岸时速度虽小，但质量很大，如稍有疏忽，就会撞坏般坞。因此，我们用质点的质量与速度的乘积来表征质点的机械运动量，称为质点的动量（Momentum of a particle）。质点的动量是一个矢量，它的方向与质点速度的方向一致，记为 $m\boldsymbol{v}$。

动量的单位：在法定计算单位中是千克·米/秒（kg·m/s）。

质点系内各质点动量的矢量和称为质点系的动量（Momentum of system of particles），记为 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p} = \sum m\boldsymbol{v} \tag{11-1}$$

将式（11-1）投影到固定直角坐标轴上，可得

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sum mv_x \\ p_y &= \sum mv_y \\ p_z &= \sum mv_z \end{aligned}\right\} \tag{11-2}$$

式中　p_x，p_y，p_z 分别表示质点系的动量在坐标轴 x，y 和 z 轴上的投影。

例 11-1　质量均为 m 的物块 A 和 B，由不可伸长的软绳通过轮 C 连接，轮 C 的质量不计，物块 A 速度为 $\boldsymbol{v}$，如图 11-1 所示。求此系统的动量。

解　把物块 A、B 分别视为质点，其速度 $v_A = v_B = v$，系统的动量在 x、y 轴上的投影分别为

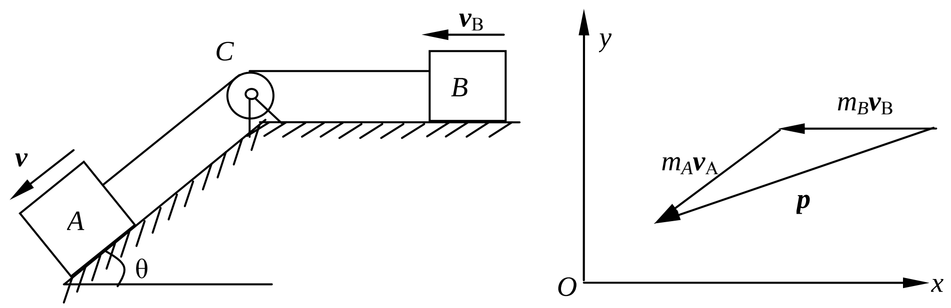

图　11-1

$$p_x = -m_A v_A \cos\theta - m_B v = -mv(1+\cos\theta)$$
$$p_y = -m_A v_A \sin\theta + 0 = -mv\sin\theta$$

系统的动量大小为 $$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = mv\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

其方向可由方向余弦来确定

$$\cos\alpha = \frac{p_x}{p} = -\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}, \qquad \sin\beta = \frac{p_y}{p} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}$$

应注意，质点的动量是其质量和它运动的绝对速度的乘积，质点系的动量为系内各质点动量的矢量和，因此，可能存在质点的动量大于质点系的动量，甚至系内的质点具有动量，而质点系的动量等于零。

质点系的运动不仅与作用在质点系上的力与有关，而且与质量的大小及其分布情况有关。质心（Center of mass）就是对质点系质量分布特征的一种描述。设一质点系由 n 个质点组成，其中任一质点的质量为 m_i，相对直角坐标系 $Oxyz$ 坐标原由点的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，则质心 C 的位置矢 $\boldsymbol{r}_C$ 由下式确定

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m\boldsymbol{r}}{M} \tag{11-3}$$

式中 $M = \sum m_i$ 为质点系总质量。质心在直角坐标系中的坐标可表示为

$$x_C = \frac{\sum mx}{M} \qquad y_C = \frac{\sum my}{M} \qquad z_C = \frac{\sum mz}{M} \tag{11-4}$$

质点的位置反映了质点系各质点的分布情况。若质点系在地球附近受重力作用，则质点 m_i 的重量为 $m_i g$，质点系总重量为 Mg。只要对质心坐标公式的分子分母同乘以 g，即得到静力学中的重心坐标公式。可见，在重力场中，质心与重心相重合，但应注意，重心只在地球表面附近才有意义，而质心在宇宙间依然存在。

当质点系运动时，它的质心也随着运动。质心运动的速度

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sum m\boldsymbol{r}}{M}\right] = \frac{\sum m\boldsymbol{v}}{M}$$

于是，得 $$\sum m\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{v}_C$$

所以 $$\boldsymbol{p} = M\,\boldsymbol{v}_C \tag{11-5}$$

即质点系的动量等于系统的质量与质心速度的乘积。

对于质量均匀分布的规划刚体，质心也就是几何中心，用式（11-5）计算刚体的动量

是非常方便的。例如，长为 l，质量为 m 的均质细杆，在平面内绕 O 轴转动，角速度为 ω，如图 11-2a 所示。细杆质心的速度为 $\boldsymbol{v}_C=\dfrac{1}{2}l\omega$，则细杆的动量为 $\dfrac{1}{2}ml\omega$，方向与 $\boldsymbol{v}_C$ 方向相同。又如图 11-2b 所示的均质滚轮，质量为 m，质心速度为 $\boldsymbol{v}_O$，则其动量为 $m\boldsymbol{v}_O$。而如图 11-2c 所示的绕中心转动的匀质轮，无论有多大的角速度和质量，由于其质心的速度为零，其动量总是零。

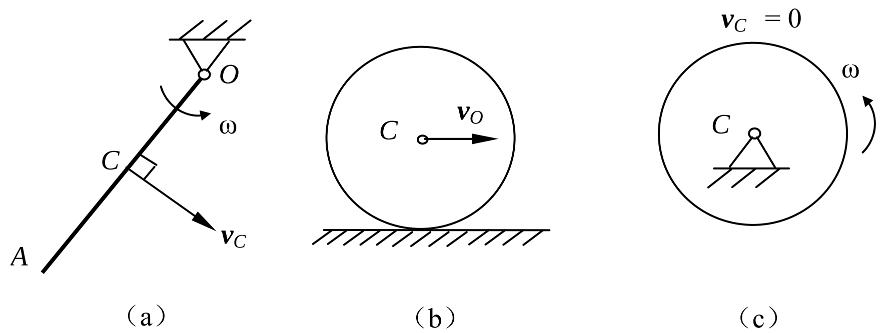

图　11-2

2．冲量（Impulse）

冲量是表示作用于物体的力在一段时间内对物体作用效果的累积。推动小车时，用较大的力可在较短时间内达到一定的速度；要是用较小的力，但作用时间长一些，也可达到同样的速度。因此，物体运动状态的改变，不仅与作用于物体上的力的大小和方向有关，而且与力作用的时间的长短有关。为了度量力在一段时间内的作用效果，我们把力与其作用时间的乘积称为该力的冲量，用 $\boldsymbol{I}$ 表示。冲量是一个矢量，它的方向与力的方向一致。在法定计量单位中，冲量的单位是牛顿·秒（N·s）。

当力 $\boldsymbol{F}$ 是常矢量时，冲量　$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\,t$

当力 $\boldsymbol{F}$ 是变矢量时，在 dt 时间内，力 $\boldsymbol{F}$ 可以似近地认为不变，因而力 $\boldsymbol{F}$ 在 dt 时间内的冲量（称为元冲量）为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

设力的作用时间是由 t_1 到 t_2，则力 $\boldsymbol{F}$ 在时间（t_2- t_1）内的冲量 $\boldsymbol{I}$，应等于在这段时间内元冲量的矢量和。即

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{11-6}$$

将式（11-6）投影到固定直角坐标轴上，得到冲量 $\boldsymbol{I}$ 在三个直角坐标轴上的投影为

$$I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\,\mathrm{d}t,\qquad I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\,\mathrm{d}t,\qquad I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\,\mathrm{d}t \tag{11-7}$$

设作用在一质点的 n 个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$，它们的合力为 $\boldsymbol{F}_R$，合力 $\boldsymbol{F}_R$ 在时间（t_2- t_1）

内的冲量 $\boldsymbol{I}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_R \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_1 \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_2 \mathrm{d}t + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_n \mathrm{d}t = I_1 + I_2 + \cdots + I_\mathrm{n}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{I} = \sum \boldsymbol{I} \tag{11-8}$$

式（11-8）说明，合力的冲量等于各分力冲量的矢量和。

同样，可将式（11-8）向直角坐标轴投影而得投影式。

11-2　动量定理

1. 质点的动量定理（Theorems of momentum of a particle）

设有一质点 M，质量为 m，速度为 $\boldsymbol{v}$，加速度为 $\boldsymbol{a}$，作用在质点 M 上的合力为 $\boldsymbol{F}$，如图 11-3 所示。由动力学基本方程有

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{11-9}$$

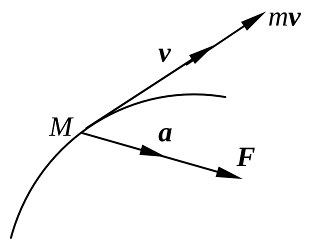

图　11-3

即质点动量对时间的导数等于作用在该质点上的合力。这就是微分形式的质点动量定理。

将式（11-9）改写为

$$\mathrm{d}\left(m\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t$$

然后将上式两边积分，时间从 t_1 到 t_2，速度 $\boldsymbol{v}$ 从 $\boldsymbol{v}_1$ 到 $\boldsymbol{v}_2$，得

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}t = \boldsymbol{I} \tag{11-10}$$

即质点的动量在任一时间内的改变，等于作用在该质点上的合力在同一时间内的冲量，这就是积分形式的质点动量定理，也称质点冲量定理（Theorems of impulse of a particle）。

将式（11-10）投影到直角坐标轴上，可得到质点动量定理的投影式

$$\left.\begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= \int_{t_1}^{t_2} F_x \,\mathrm{d}t = I_x \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= \int_{t_1}^{t_2} F_y \,\mathrm{d}t = I_y \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= \int_{t_1}^{t_2} F_z \,\mathrm{d}t = I_z \end{aligned}\right\} \tag{11-11}$$

即在任一时间内，质点的动量在任一轴上投影的改变，等于作用在该质点上的合力的冲量

的同一轴上的投影。

2．质点系的动量定理（Theorems of momentum of system of particles）

对于 n 个质点组成的质点系，系内每一个质点都可以写出类似于式（11-9）的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}^{e}+\boldsymbol{F}^{i}$$

式中，$\boldsymbol{F}^{e}$，$\boldsymbol{F}^{i}$ 分别表示作用于质点上的外力和内力，将这 n 个方程相加得

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\sum\boldsymbol{F}^{e}+\sum\boldsymbol{F}^{i}$$

交换求和、求导次序得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum m\boldsymbol{v})=\sum\boldsymbol{F}^{e}+\sum\boldsymbol{F}^{i}$$

式中 $\sum m\boldsymbol{v}$ 为质点系的动量，注意 $\sum\boldsymbol{F}^{i}=0$，所以上式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}=\sum\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{F}_{R}^{e} \qquad (11\text{-}12)$$

即质点系的动量对时间的变化率，等于作用在质点系上所有外力的矢量和（外力系的主矢），这就是质点系动量定理的微分形式。将式（11-12）投影到直角坐标轴上，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{x}&=\sum F_{x}^{e}=F_{Rx}^{e}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{y}&=\sum F_{y}^{e}=F_{Ry}^{e}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{z}&=\sum F_{z}^{e}=F_{Rz}^{e}\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}13)$$

式（11-13）表明质点系的动量在任一轴上的投影对时间的导数，等于作用于质点系的外力在同一轴上投影的代数和。

式（11-12）也可写成

$$dp=\sum F^{e}dt$$

将上式两边对应积分，时间从 t_1 到 t_2，动量从 $\boldsymbol{p}_1$ 到 $\boldsymbol{p}_2$，得

$$\boldsymbol{p}_{2}-\boldsymbol{p}_{1}=\sum\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{e}\mathrm{d}t=\sum\boldsymbol{I}^{e} \qquad (11\text{-}14)$$

式中 $\boldsymbol{I}^{e}$ 表示力 $\boldsymbol{F}^{e}$ 在时间（t_2-t_1）内的冲量。式（11-14）表示质点系动量在任一时间内的改变，等于作用在该质点系所有外力在同一时间内冲量的矢量和，这就是积分形式的质点系动量定理，也称为质点系的冲量定理。

将式（11-14）投影到直角坐标轴上，得

$$\left.\begin{aligned} p_{2x} - p_{1x} &= \sum I_x^e \\ p_{2y} - p_{1y} &= \sum I_y^e \\ p_{2z} - p_{1z} &= \sum I_z^e \end{aligned}\right\} \tag{11-15}$$

由此可见，系统动量的改变与内力无关。内力可以改变质点系中单个质点的动量，却不能改变系统的总动量。

3．动量守恒定理

如果作用于质点系的外力主矢等于零，则质点系的动量保持不变，即

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \text{常矢量}$$

如果作用于质点系的外力主矢在某一坐标轴上的投影恒等于零，如 $\sum F_x^e = 0$，则质点系的动量在这个坐标轴上投影保持不变，即

$$p_{1x} = p_{2x} = \text{恒量}$$

以上结果称为质点系动量守恒定理（Theorems of conservation of momentum of system particles）。

4．举例

例 11-2 在水平面上有物体 A 与 B，$m_A = 2\text{kg}$，$m_B = 1\text{kg}$，今 A 以某一速度运动而撞击原来静止的 B 块，如图 11-4 所示。撞击后，A 与 B 一起向前运动，历时 2s 而停止。设 A、B 与平面的摩擦因数 $f_s = \dfrac{1}{4}$，求撞击前 A 的速度，以及撞击时 A、B 相互作用的冲量。

解 （1）运动分析：A 与 B 均作直线运动，设撞击前 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_O$，从撞击开始到停止运动的 2s 内，A 的速度从 v_O 到 0；而 B 开始是静止的，最后仍处于静止。

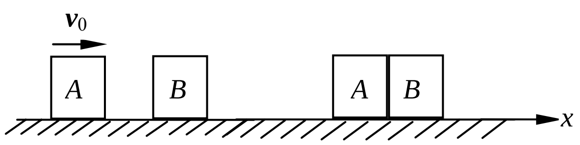

图 11-4

（2）应用质点的动量定理求解：从撞击开始到停止运动这过程中，在水平方向上，A 上有两个冲量作用：一个是 B 对它的撞击冲量，设其大小为 I，一个是平面对 A 块作用的动滑动摩擦力的冲量，其大小为 $F_A t$，其中 $F_A = f_s F_{NA} = f_s m_A g$。这两个冲量的方向都与运动方向相反，取 x 轴的水平指向与运动方向相同，于是根据动量定理，有

$$0 - m_A v_0 = -I - F_A t \tag{1}$$

B 块起始是静止，结束时也是静止，所以它的动量变化为零。在这个过程中，作用于 B 上水平方向的冲量也有两个：一个是 A 对 B 撞击时作用的冲量，它与 B 作用于 A 上的撞击量是互为作用与反作用，大小相等而方向相反；另一个是滑动摩擦力的冲量，大小为 $F_B \cdot t$

而 $F_B = f_s F_{NB} = f_s m_B g$，方向与运动方向相反。于是有

$$0 = I - F_B \cdot t \tag{2}$$

联解式（1）与式（2）得

$$v_0 = \frac{f_s(m_A + m_B)g\,t}{m_A} = \frac{\frac{1}{4}\times(2+1)\times 9.8\times 2}{2} = 7.35\text{m/s}$$

$$I = F_B\, t = f_s\, m_B\, g t = \frac{1}{4}\times 1\times 9.8\times 2 = 4.9\text{N}\cdot\text{s}$$

例 11-3 电动机的外壳固定在水平基础上，定子质量为 m_1，转子质量为 m_2，如图 11-5 所示。设定子的质心位于转轴的中心 O_1，但由于制造误差，转子的质 O_2 到 O_1 的距离 e。已知转子匀角速度为 ω 转动，求基础的支反力。

解 用质点系动量定理求解。

（1）取电机外壳与转子组成质点系。

（2）受力分析：外力有重力 $m_1\boldsymbol{g}$、$m_2\boldsymbol{g}$，基础的反力 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$ 和反力偶 M_0。

（3）运动分析：机壳不动，质点系的动量就是转子的动量，其大小为

$$p = m_2\,\omega e$$

方向如图所示。设 $t = 0$ 时，O_1O_2 铅垂，有 $\varphi = \omega t$。由动量定理的投影式得

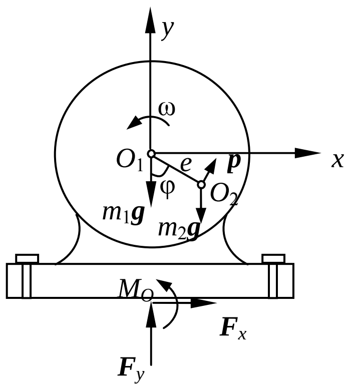

图 11-5

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y - m_1 g - m_2 g$$

而 $$p_x = m_1\, e\omega\cos\omega t, \qquad p_y = m_2\, e\omega\sin\omega t$$

代入上式，解出基础反力

$$F_x = -m_2\,\omega^2 e\sin\omega t, \qquad F_y = (m_1 + m_2)g + m\,e\omega^2\cos\omega t$$

电机不转时，基础只有向的反力 $(m_1 + m_2)g$，称为静反力（Static reaction）；电机转动时的基础反力可称为动反力（Dynamic reaction）。动反力与静反力的差值是由于系统运动而产生的，可称为附加动反力（Complementary dynamic reaction）。

例 11-4 物块 A 可沿光滑水平面自由滑动，其质量为 m_A，小球 B 的质量为 m_B，以细杆与物块铰接，如图 11-6 所示。设杆长为 l，质量不计，初始时系统静止，并有初始摆动角 φ_0；释放后，细杆近似以 $\varphi = \varphi_0\cos kt$ 规律摆动（k 为已知常量），求物块 A 的最大速度。

解 （1）取物块 A 和小球 B 为研究对象。

（2）受力分析：系统只受重力作用，所以有 $\sum F_x^e \equiv 0$，则动量在水平方向守恒。

（3）运动分析：细杆角速度为 $\omega = \varphi' = -k\varphi_0 \sin kt$，当 $\sin kt = 1$ 时，其绝对值为最大，此时应有 $\cos kt = 0$，即 $\varphi = 0$。由此，当细杆铅垂时小球相对于物块有最大的水平速度，其值为

$$v_r = l\,\omega_{\max} = k\varphi_0 l$$

当此速度 v_r 向左时，物块应有向右的绝对速度，设为 v，而小球向左的绝对速度值为 $v_a = v_r - v$。

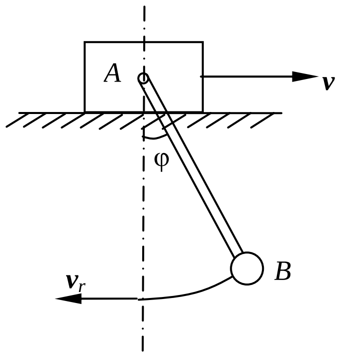

图 11-6

（4）由动量守恒定理，得

$$m_A v - m_B (v_r - v) = 0$$

所以

$$v = \frac{m_B v_r}{m_A + m_B} = \frac{k\, m_B\, \varphi_0\, l}{m_A + m_B}$$

当 $\sin kt = -1$ 时，也有 $\varphi = 0$，此时小球相对物体向右的最大速度 $k\varphi_0 l$，可求得物块有向左的最大速度 $\frac{k\, m_B\, \varphi_0\, l}{m_A + m_B}$。

11-3 质心运动定理

1．质心运动定理

质点系运动不仅与所受的力有关，而且与质点系的质量分布情况有关，而质量分布的特征之一可用质量中心来描述。因此有必要来研究质心的运动规律，为此，只须把式（11-5）确定的质点系动量表达式 $\boldsymbol{p} = M\boldsymbol{v}_C$ 代入质点系动量定理的表达式（11-12）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\,\boldsymbol{v}_C) = \sum \boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_R^e$$

引入质心加速度 $\boldsymbol{a}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}$，则上式改写成

$$M\,\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_R^e \qquad (11\text{-}16)$$

即，质点系的总质量与其质心加速度的乘积，等于作用于该质点系上所有外力的矢量和，这就是质心运动定理（Theorems of motion of center of mass）。把式（11-16）和牛顿第二定律有表达式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ 相比较，可见质点系的质心的运动与一个质点的运动相同。即设想质心具有质点系的总质量，而外力主矢也作用在质心上。

将式（11-16）投影到直角坐标轴上，得

$$\left.\begin{aligned} M\ x''_C &= \sum F_x^e = F_{Rx}^e \\ M\ y''_C &= \sum F_y^e = F_{Ry}^e \\ M\ z''_C &= \sum F_z^e = F_{Rz}^e \end{aligned}\right\} \qquad （11-17）$$

2．质心运动守恒定理

（1）现在讨论质心运动守恒的情形

1）如果$\sum \boldsymbol{F}^e = 0$，由式（11-16）可知$\boldsymbol{a}_C = 0$，从而有$\boldsymbol{v}_C =$常矢量。即，如果作用于质点系的所有外力的矢量和（主矢）始终等于零，则质心保持静止或匀速直线运动。也就是在这样的系统中，每一质点的运动可能很复杂，其速度的大小和方向都可能随时改变，但质心却作惯性运动。

2）如果$\sum F_x^e = 0$，由式（11-17）可知$x''_C = 0$，从而有$x'_C = v_{Cx} =$常量。即，作用于质点系的所有外力在某固定轴上的投影的代数和等于零，则质心速度在该轴上投影是常量。

如果初瞬时质心的速度在该固定轴上的投影也等于零，即

$x'_C\big|_{t=0} = 0$，　　则$x' = 0$，　　即$x_C =$常量$= x_C\big|_{t=0}$

可见，如果系统中有一部分质量沿 x 轴运动，则必定引起其它部分质量向相反方向运动，使整个系统的质心坐标x_C保持不变。

以上两种情况说明了质心守恒的条件，称为质心运动守恒定理（Theorems of conservation of motion of center of mass）。

以x_{C0}表示质心 C 在$t = 0$ 时的坐标，则

$$x_{C0} = \frac{\sum m_j x_{j0}}{M}$$

用x_C表示质心 C 在任意瞬时 t 的坐标，则

$$x_C = \frac{\sum m_j x_j}{M}$$

因为　$x_{C0} = x_C$，所以

$$\sum m_j x_j - \sum m_j x_{j0} = 0$$

即

$$\sum m_j (x_j - x_{j0}) = 0$$

令 $\Delta x_j = x_j - x_{j0}$，表示质点的坐标 x_j 的绝对改变量。于是得到

$$\sum m_j(\Delta x_j) = 0 \tag{11-18}$$

此式称为质心守恒定理的位移形式。

（2）根据质心运动定理可知，质心的运动仅取决于外力的主矢量，而与质点系的内力无关，内力仅能影响各个质点的运动。下面举几个常见的实例加以说明。

1）站在光滑水平面上的人，只能向上跳起，而不可能前后或左右运动。如果向后抛物体，人就会前运动，这是由于人受到物体对人的反作用力，使人的质心产生向前的加速度。

2）汽车开动时，汽缸内的燃气压力对汽车整体来说是内力，仅靠它是不能使汽车前进，只能是当燃气推动活塞，通过传动机构带动主动轮转动，地面对主动轮作用了向前的摩擦力，而且这个摩擦力大于总的阻力时，汽车才能前进。在下雪天汽车开动时有打滑现象，正是由于摩擦力很小的缘故。

例 11-5 如图 11-7 所示，在静止的小船上，一人自船头走到船尾，设人质量为 m_2，船的质量为 m_1，船长 l，水的阻力不计，求船的位移。

解 （1）取人与船组成质点系为研究对象。

（2）受力分析：因不计水的阻力，故外力在水平轴上的投影等于零。因此质心在水平轴上的坐标保持不变。取坐标轴如图所示。

在人走动前，质心坐标为

$$x_{C1} = \frac{m_2 a + m_1 b}{m_2 + m_1}$$

人走到船尾时，船移动的距离为 s，则质点的坐标为

$$x_{C2} = \frac{m_2(a - l + s) + m_1(b + s)}{m_2 + m_1}$$

由于质心在 x 轴上的坐标不变，即 $x_{C1} = x_{C2}$，解得

$$s = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

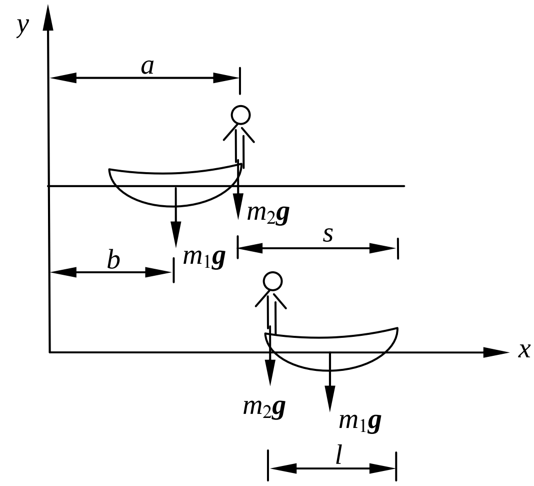

图 11-7

例 11-6 质量为 30kg 的小车 B 上有一质量为 20kg 的重物 A。已知小车上有一 120N 的水平力作用使系统由静止开始运动，在 2s 内小车移过 5m，不计轨道阻力，试计算 A 在 B 上移过的距离。

解 以重物 A 和小车 B 为研究对象，系统除受重力和地面的约束力外，小车受水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 作用。

设开始时，物块与小车的重心之间距离为 b，则系统重心 C 到小车重心 B 的水平距离

为 b_1，有

$$P_B \cdot b_1 = P_A(b - b_1)$$

得

$$b_1 = \frac{P_B}{P_A + P_B} b = \frac{2}{5} b$$

（2）由于水平力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，根据质心运动定理，有

$$(m_A + m_B) a_C = F$$

$$a_C = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{120}{20+30} = 2.4\text{m}/s^2$$

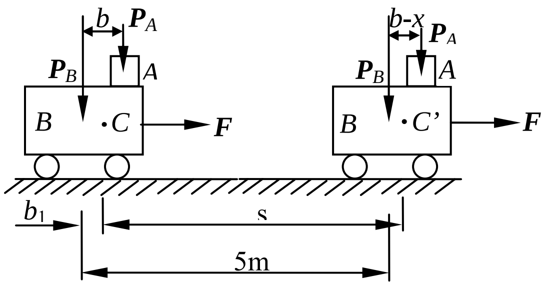

图 11-8

由此，质心作匀加速直线运动，其移动过的距离 S 为

$$S = \frac{1}{2} a_C t^2 = \frac{1}{2} \times 2.4 \times 2^2 = 4.8\text{m}$$

（3）由于小车移过 5m，故重物 A 在小车上必有相对滑动，设其滑动量为 x，则在 t =2s 时，物块 A 重心与小车 B 的重心间距离为（b-x），而系统重心与小车 B 重心间距离为 $b_2 = \frac{2}{5}(b - x)$，如图 11-8 所示，有

$$b_1 + S = 5 + b_2$$

即
$$\frac{2}{5} b + 4.8 = 5 + \frac{2}{5}(b - x)$$

解之得
$$x = 0.5\text{m}$$

例 11−7 如图 11-9 所示，设例 11-3 中的电动机没用螺栓固定，各处摩擦不计，初始时电动机静止，求转子以匀角速度 ω 转动时电动机外壳的运动。

解 （1）受力分析：电机受重力作用和法向反力作用 $\sum F_x^e = 0$，且初始为静止所以有 x_C 保持不变。

（2）设转子静止时 $x_{C_1} = a$，当转子转过角度 φ 时，定子应向左移动，设移动距离为 s，则质心坐标为

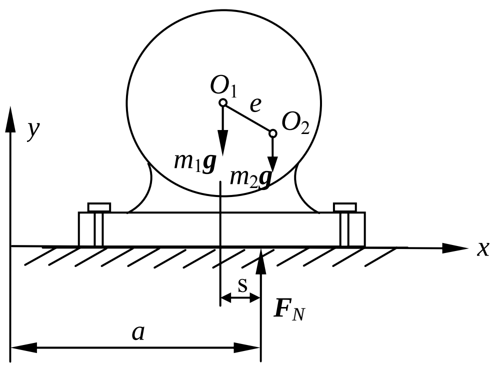

图 11-9

$$x_{C_2}=\frac{m_1(a-s)+m_2(a+e\sin\varphi-s)}{m_1+m_2}$$

因为在水平方向质心守恒，所以有 $x_{C_1}=x_{C_2}$，解得

$$s=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\sin\varphi$$

由此可见，当转子偏心的电动机未用螺栓固定时，将在水平面上作往复运动。

顺便指出，支承面的法向反力的最小值由例 11-3 求得
为

$$F_{y\min}=(m_1+m_2)g-m_2e\omega^2$$

当 $\omega>\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_2e}g}$ 时，有 $F_{y\min}<0$，如果电动机未用螺栓固定，将会离地跳起来。

综合以上各例可知，应用质心运动定理解题的步骤如下：

（1）分析质点系所受的全部外力，包括主动力和约束力。

（2）根据外力情况确定质心运动是否守恒。

（3）如果外力主矢等于零，且初始时质点系为静止，则质心坐标保持不变。计算在两个时刻质心的坐标（用各质点坐标表示），令其相等，即可求得所要求的质点位移。

（4）如果外力主矢不等于零，计算质心坐标，求质心的加速度，然后应用质心运动定理求未知力。若质点系上作用的未知力在某一方向有两个以上，则应用质心运动定理只能求出它们在这一方向投影的代数和。

（5）在已知外力条件下，欲求质心的运动规律，与求质点的运动规律相同。