

## 第十四章 达朗伯原理

### § 14-1 质点的达朗伯原理

达朗伯原理 (D'Alembert's principle) 是非自由质点系动力学的基本原理, 通过引入惯性力 (Inertial force, Reversed effective force), 建立虚平衡状态, 可把动力学问题在形式上转化为静力学平衡问题而求解。这种求解动力学问题的普遍方法, 称为动静法 (Method of kineto-statics)。动静法在工程技术中有广泛地应用。

#### 1. 质点的达朗伯原理

设质量为  $m$  的非自由质点  $M$ , 在主动力  $\mathbf{F}$  和约束反力  $\mathbf{F}_N$  的作用下, 作曲线运动如图 14-1 所示。在图示瞬时, 质点  $M$  的加速度为  $\mathbf{a}$ , 则质点  $M$  的动力学基本方程为

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_N$$

上式移项, 得  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + (-m\mathbf{a}) = 0$

$$\text{令 } \mathbf{F}_I = -m\mathbf{a} \quad (14-1)$$

显然,  $\mathbf{F}_I$  具有力的量纲, 称为质点  $M$  的惯性力。

$$\text{则有 } \mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_I = 0 \quad (14-2)$$

现在, 我们从静力学的角度来考察式 (14-2) 的矢量式所表达的力学意义。若将  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_N$  和  $\mathbf{F}_I$  视为汇交于一点的力系, 则式 (14-2) 恰恰就是这个汇交力系的平衡条件。事实上, 质点  $M$  只作用有主动力  $\mathbf{F}$  和约束反力  $\mathbf{F}_N$ , 并没有受到惯性力  $\mathbf{F}_I$  的作用。因而我们构造一个与式 (14-2) 相对应的质点  $M$  的平衡状态, 很简单, 只要将惯性力  $\mathbf{F}_I$  人为地施加于质点  $M$  上就可以了 (见图 14-2)。习惯上称为在质点  $M$  上虚加惯性力。这样一来, 一个虚拟的质点平衡状态 (见图 14-2) 便与力学的平衡条件式 (14-2) 一一对应起来, 我们便可对虚拟的平衡状态, 采用静力学列平衡方程的方法来建立动力学方程。式 (14-2) 只是质点动力学基本方程的移项而已, 并未改变它的动力学本质。

综上所述, 可得质点的达朗伯原理: 质点在运动的每一瞬时, 作用于质点上的主动力、约束反力和该质点的惯性力组成一个平衡力系。

实质上, 达朗伯原理对质点的动力学基本方程重新赋予了静力学虚拟平衡的结论。这就提供了在质点虚加惯性力, 采用静力学平衡方程的形式来求解动力学问题的方法, 称为质点的动静法 (Method of kineto-statics of a particle)。

必须指出, 惯性力是人为地虚加在运动的质点上, 是为了应用静力学的方法而达到求解动力学的目的所采取的一种手段, 质点的平衡状态是虚拟的。千万不可认为惯性力就作用在运动的物体上, 甚至错误地把惯性力视为主动力去解释一些工程实际问题。

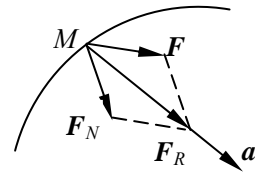


图 14-1

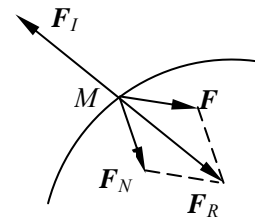


图 14-2

## 2. 惯性力的概念

在达朗伯原理中，惯性力无疑是一个关键。下面我们对惯性力的概念作进一步地阐述。

质量均为  $m$  的物块  $A$  和  $B$ ，置于光滑的水平面上，受水平力  $P$  作用（见图 14-3 (a)）所获得加速度为  $a$ ，根据质点的动力学基本方程，可得物块  $B$  所受到的作用力  $F = ma$ （见图 14-3 (c)）。根据作用与反作用定律，物块  $A$  必受到  $B$  块的反作用力  $F'$ ，并且  $F' = -F = -ma$ 。注意到式 (14-1)，则  $F_I = F'$ 。

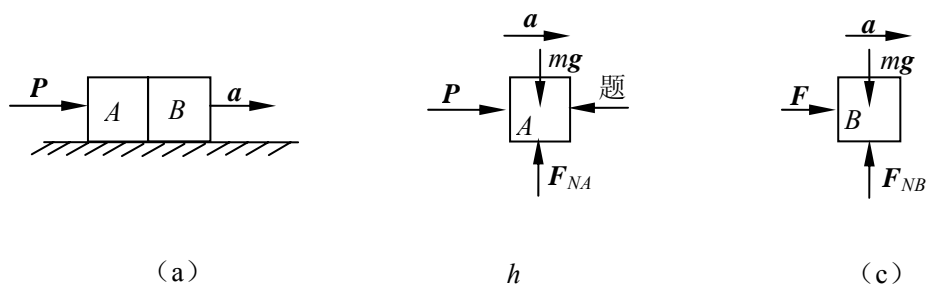


图 14-3

可见，物块  $B$  的惯性力，就是获得加速度的物块  $B$  而给予施力体（ $A$  块）的反作用力。物块  $B$  的质量愈大，其惯性愈大，则给施力体的反作用也愈大。因此称此反作用力为物块  $B$  的惯性力。显然，物块  $B$  的惯性力并不作用在物块  $B$  上，但它却是一个真实的力。

总之，质点的惯性力是：当质点受力作用而产生加速度时，由于其惯性而对施力体的作用力。质点惯性力的大小等于质点的质量与加速度的乘积、方向与加速度方向相反。

当质点作曲线运动时，若将质点的加速度分解为切向加速度  $a_\tau$  和法向加速度  $a_n$ ，则质点的惯性力  $F_I$  也分解为切向惯性力  $F_{I\tau}$ （Tangential component of inertia force）和法向惯性力  $F_{In}$ （Normal component of inertia force），即

$$F_{I\tau} = -ma_\tau, \quad F_{In} = -ma_n \quad (14-3)$$

由于法向加速度总是沿主法线指向曲率中心，所以  $F_{In}$  的方向总是背离曲率中心，称为离心惯性力（Centrifugal inertia force），简称为离心力。

**例 14-1** 图 14-4 所示圆锥摆中，质量为  $m$  的小球  $A$ ，系于长为  $l$  的无重细绳上，在水平面内作匀速圆周运动（绳与铅垂线夹角  $\alpha$  保持不变）。试求小球  $A$  的速度和绳的拉力。

解 以小球  $A$  为研究对象。在任一位置时, 小球受力有重力  $mg$  和绳的拉力  $F$ 。由题意知, 小球作匀速圆周运动, 切向加速度  $a_t = 0$ , 法向加速度  $a_n = \frac{v^2}{l \sin \alpha}$ , 于是, 小球  $A$  的惯性力的大小为

$$F_I = F_{I_n} = m a_n = \frac{m v^2}{l \sin \alpha}$$

将  $F_I$  虚加在小球  $A$  上, 根据达朗伯原理, 小球则处于虚平衡状态, 由平衡方程

$$\sum F_y = 0 \quad F \cos \alpha - mg = 0$$

得 
$$F = mg / \cos \alpha$$

$$\sum F_x = 0 \quad F \sin \alpha - F_I = 0$$

即

$$\frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha - \frac{m v^2}{l \sin \alpha} = 0$$

故

$$v = \sqrt{g l \sin \alpha \tan \alpha}$$

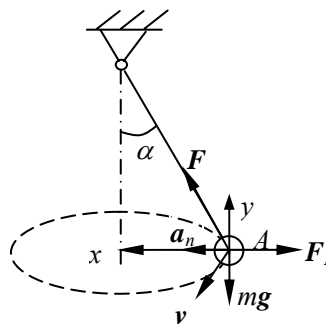


图 14-4

#### § 14-2 质点系的达朗伯原理

现将质点的达朗伯原理推广并应用于质点系。设由  $n$  个质点组成的非自由质点系, 其中任一质点  $M_i$  的质量为  $m_i$ , 作用有主动力  $F_i$ , 约束反力  $F_{N_i}$ 。某瞬时质点的加速度为  $a_i$ , 则质点的惯性力为  $F_{I_i} = -m_i a_i$ , 根据达朗伯原理, 对于质点  $M_i$ , 虚加上惯性力  $F_{I_i}$ , 该质点必处于虚平衡状态。则

$$F_i + F_{N_i} + F_{I_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14-4)$$

此式表明, 在质点系运动的任一瞬时, 作用于每一质点上的主动力, 约束反力和该质点的惯性力都组成一个平衡力系, 这就是质点系的达朗伯原理。

由于每个质点在主动力, 约束反力和惯性力作用下都处于虚平衡状态, 因而整个质点系也必处于虚平衡状态。根据空间一般力系的平衡条件, 作用于质点系的力系的主矢和对任一点的主矩都等于零, 即

$$\left. \begin{aligned} \sum F + \sum F_N + \sum F_I = 0 \\ \sum M_o(F) + \sum M_o(F_N) + \sum M_o(F_I) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-5)$$

作用于质点系上的力可分为内力和外力，式(14-5)可写为

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathbf{F}^{(e)} + \sum \mathbf{F}^{(i)} + \sum \mathbf{F}_I = 0 \\ \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(e)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(i)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_I) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-6)$$

其中， $\sum \mathbf{F}^{(e)}$ 、 $\sum \mathbf{F}^{(i)}$  分别表示作用于质点系的外力和内力的矢量和； $\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(e)})$ 、 $\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(i)})$  分别表示作用于质点系的外力和内力对任一点矩的矢量和。由于质点系的内力是成对出现的，且等值、反向、共线，所以内力的主矢和对任一点的主矩恒等于零，即

$$\sum \mathbf{F}^{(i)} = 0, \quad \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(i)}) = 0$$

于是，式(14-6)写成：

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathbf{F}^{(e)} + \sum \mathbf{F}_I = 0 \\ \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(e)}) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_I) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-7)$$

因此，质点系的达朗伯原理也可陈述为：在质点系运动的任一瞬时，作用于质点系上的外力系和各质点的惯性力系组成一个平衡力系，即它们的主矢和对任一点的主矩矢量和都等于零。

在质点系的每一个质点上虚加惯性力，该质点系则处于虚平衡状态，就可应用平衡方程的形式来求解质点系动力学问题，称为质点系的动静法。

**例 14-2** 如图 14-5 所示，滑轮的半径为  $r$ ，质量  $m$  均匀分布在轮缘上，可绕水平轴转动。轮缘上跨过的软绳的两端各挂质量为  $m_1$  和  $m_2$  的重物，且  $m_1 > m_2$ 。绳的重量不计，绳与滑轮之间无相对滑动，轴承摩擦忽略不计，求重物的加速度。

**解** (1) 取系统为对象。

(2) 受力分析：外力有  $mg$ ， $m_1g$ ， $m_2g$ ， $F_N$ 。

(3) 运动分析：因  $m_1 > m_2$ ， $m_1$  块有  $a$ ，当绳与轮之间无相对滑动时， $a^r = a$ ；轮缘上  $m_i$  点惯性力的大小为

$$F_{I_{ni}} = m_i a_{in} = m_i \frac{v^2}{r}, \quad F_{I_{\tau i}} = m_i a_{i\tau}$$

$$F_{I_1} = m_1 a, \quad F_{I_2} = m_2 a$$

(4) 列虚平衡方程  $\sum M_O(\mathbf{F}) = 0$  得

$$(m_1 g - F_{I_1} - F_{I_2} - m_2 g)r - \sum F_{I_{\tau i}} r = 0$$

或

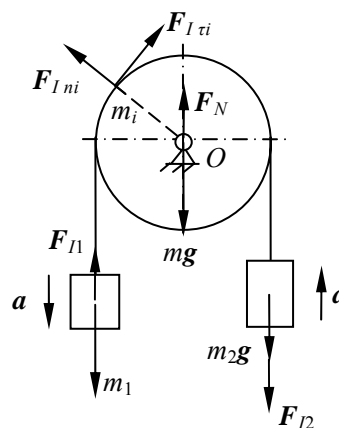


图 14-5

$$(m_1g - m_1a - m_2a - m_2g)r - \sum m_i ar = 0$$

因为

$$\sum m_i ar = ar \sum m_i = arm$$

解得

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m} g$$

**例 14-3** 均质细直杆  $AB$  重  $P$ , 长为  $l$ , 其  $A$  端铰接在铅垂轴上, 并以匀角速度  $\omega$  绕轴转动如图 14-6 所示。当杆  $AB$  与轴的夹角  $\theta$  为常量时, 求  $\omega$  和  $\theta$  的关系。

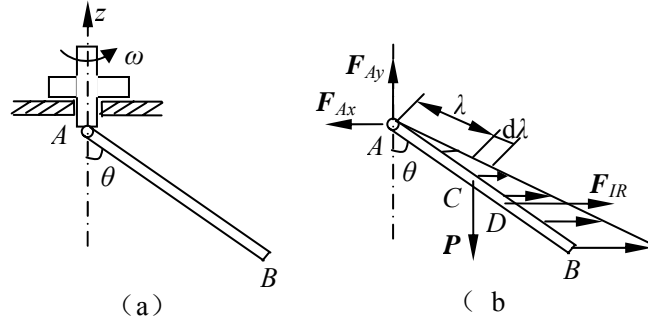


图 14-6

**解** (1) 取杆  $AB$  为对象。

(2) 受力分析: 外力有  $P$ ,  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ 。

(3) 运动分析: 虚加惯性力。

在  $\lambda$  处取  $d\lambda$ , 其质量  $dm = \frac{P}{g} \frac{d\lambda}{l}$ ,  $a_i^n = \omega^2 \lambda \sin \theta$ ,  $dF_I = \frac{P}{g} \frac{d\lambda}{l} \omega^2 \lambda \sin \theta$

$$F_{IR} = \int_l dF_I = \int_0^l \frac{P \omega^2 \sin \theta}{l \cdot g} \cdot \lambda d\lambda = \frac{P}{2g} l \omega^2 \sin \theta \quad (a)$$

设合力作用线与  $AB$  杆的交点为  $D$  并且  $AD = b$ , 根据合力矩定理, 有

$$F_{IR} b \cos \theta = \int_l dF_I \lambda \cos \theta \quad (b)$$

而 
$$\int_l dF_I \lambda \cos \theta = \int_0^l \frac{P \omega^2 \sin \theta}{l g} \lambda^2 d\lambda \cos \theta = \frac{P}{3l g} \omega^2 l^3 \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (c)$$

将式 (a), (c) 代入式 (b), 则得  $b = \frac{2}{3} l$

(4) 由达朗伯原理, 杆  $AB$  的虚平衡方程有

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad F_{IR} \frac{2}{3} l \cos \theta - \frac{P}{2} l \sin \theta = 0$$

即

$$\frac{P}{2g} l \omega^2 \sin \theta \cdot \frac{2}{3} l \cos \theta - \frac{P}{2} l \sin \theta = 0$$

或 
$$\sin \theta \left( \frac{2l}{3g} \omega^2 \cos \theta - 1 \right) = 0$$

于是可得  $\sin \theta = 0$  或  $\cos \theta = \frac{3g}{2l\omega^2}$

显然,  $\theta = 0$  与题设不符, 可舍去不计。

### § 14-3 刚体惯性力系的简化

应用质点系动静法时, 需要在每个质点上虚加惯性力, 组成惯性力系。如果质点的数目有限, 逐点加惯性力是可行的。对于刚体, 它可看作无穷多个质点的集合, 不可能逐个质点去加惯性力。于是, 我们利用静力学中力系简化的方法先将刚体惯性力系加以简化, 用简化的结果来等效地代替原来的惯性力系, 解题时就方便多了。

下面分别对刚体作平动, 绕定轴转动和平面运动时的惯性力系进行简化。

#### 1. 刚体作平动

刚体平动时, 各点具有相同的加速度  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C$ , 因而其惯性力系是一同向平行力系,

与重力系类似。这个力系简化为过质心的合力  $\mathbf{F}_{IR} = -\sum m_i \mathbf{a}_C = -\mathbf{a}_C \sum m_i$ , 即

$$\mathbf{F}_{IR} = -M\mathbf{a}_C \quad (14-8)$$

于是得结论: 平动刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力, 其大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 合力的方向与加速度方向相反。

#### 2. 刚体的定轴转动

在此仅研究刚体具有质量对称面且转轴垂直于此对称面的情况。当刚体转动时, 平行于转轴的任一直线作平动, 此直线上的惯性力系可合成为过对称点的一个合力。因而, 刚体的惯性力系可先简化为该质量对称面内的一个平面惯性力系。我们再将此平面惯性力系向转轴 ( $z$  轴) 与对称面的交点  $O$

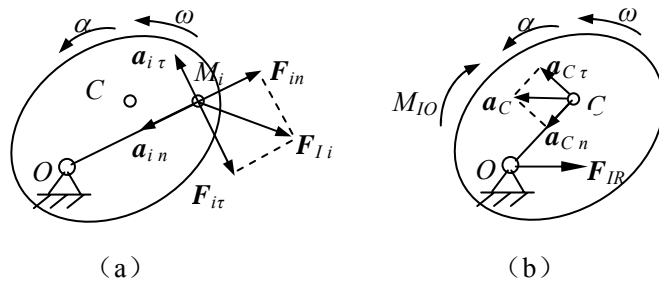


图 14-7

简化, 惯性力系的主矢仍为  $\mathbf{F}_{IR} = -M\mathbf{a}_C$ , 具体解题时, 也可将  $\mathbf{F}_{IR}$  分解为  $\mathbf{F}_{IR}^\tau$  和  $\mathbf{F}_{IR}^n$ , 则

$$\mathbf{F}_{IR}^n = -M\mathbf{a}_{Cn}, \quad \mathbf{F}_{IR}^\tau = -M\mathbf{a}_{C\tau} \quad (14-9)$$

惯性力  $\mathbf{F}_{Ii}$  也可以分解为相应的两个分量  $\mathbf{F}_{Ii}^\tau$  和  $\mathbf{F}_{Ii}^n$ , 如图 14-7(a)所示, 其大小分

别为  $F_{Ii}^{\tau} = m_i r_i \alpha$ ,  $F_{Ii}^n = m_i r_i \omega^2$  方向如图示。于是,

惯性力系对点  $O$  的主矩

$$\begin{aligned} M_{IO} &= \sum M_o(\mathbf{F}_{Ii}) = \sum M_o(\mathbf{F}_{Ii}^{\tau}) + \sum M_o(\mathbf{F}_{Ii}^n) \\ &= -\sum (m_i r_i \alpha) r_i = -(\sum m_i r_i^2) \alpha \end{aligned}$$

即: 
$$M_{IO} = -J_z \alpha \quad (14-10)$$

式中,  $J_z$  是刚体对转轴的转动惯量, 负号表示主矩  $M_{IO}$  与  $\alpha$  的转向相反。可见, 具有质量对称面垂直轴转的定轴转动刚体, 惯性力系向转轴简化为一个力和一个力偶, 该力的大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 方向与质心加速度方向相反, 作用线通过转轴; 该力偶矩等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度之积, 转向与角加速度转向相反。如图 14-7(b)所示。

在工程实际中, 经常遇到几种特殊情况:

(1) 转轴通过刚体质心。此时  $a_C = 0$ , 可知  $F_{IR} = 0$ 。则刚体的惯性力系简化为一惯性力偶, 其矩  $|M_{IC}| = J_z |\alpha|$ , 转向与  $\alpha$  转向相反。

(2) 刚体匀速转动, 此时  $\alpha = 0$ , 可知  $M_{IO} = 0$ , 则刚体的惯性力系简化为作用在点  $O$  的一个惯性力  $F_{In}$ , 且  $F_{In} = Mr_C \omega^2$ , 指向与  $a_{Cn}$  相反。

(3) 转轴过质心且刚体作匀速转动, 此时  $F_{IR} = 0$ ,  $M_{IO} = 0$ , 刚体的惯性力系为平衡力系。

### 3. 刚体作平面运动

工程中, 作平面运动的刚体常有对称平面, 且平行于此平面而运动。这种刚体的惯性力系可先简化为在对称面的平面力系。

对称面内的平面图形, 如图 14-8 所示, 由运动学知, 平面图形的运动可分解为随基点的平动与绕基点的转动。取质心  $C$  为基点, 设质心的加速度  $a_C$ , 转动的角加速度为  $\alpha$ , 简化到对称面的惯性力系分为两部分: 刚体随质心平动的惯性力系简化为一个通过质心的力; 刚体绕质心转动的惯性力系简化为一个力偶。该力为

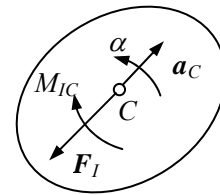


图 14-8

$$\mathbf{F}_I = -M \mathbf{a}_C \quad (14-11)$$

力偶矩为 
$$M_{IC} = -J_C \alpha \quad (14-12)$$

于是得结论: 有对称平面的刚体, 平行于这平面运动时, 刚体的惯性力系可简化

为在对称平面内的一个力和一个力偶。该力通过质心，其大小等于刚体质量与质心加速度的乘积，其方向与质心加速度方向相反；该力偶矩等于对通过质心且垂直于对称面的轴的转动惯量与角加速度的乘积，其转向与角加速度的转向相反。

**例 14-4** 均质细直杆  $AB$  长为  $l$ 、重为  $W$ ，用固定铰支座  $A$  及绳  $BE$  维持在水平位置（图 14-9 (a)）。当绳  $BE$  被剪断瞬时，求杆  $AB$  的角加速度和  $A$  处的反力。

**解** 当绳  $EB$  被剪断后， $AB$  杆将绕  $A$  轴作定轴转动，将  $AB$  杆的惯性力系向转轴  $A$  简化后，可应用动静法求解。

(1) 研究对象与受力分析。取  $AB$  杆为研究对象，受力有重力  $W$ 、铰支座  $A$  处的反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ ，绳  $BE$  已被剪断，不再受力，不得在受力图上画出。

(2) 虚加惯性力。绳  $BE$  剪断瞬时，杆  $AB$  的角速度  $\omega = 0$ ，角加速度设为  $\alpha$ 。此时质心  $C$  的法向加速度  $a_C^n = \frac{l}{2}\omega^2 = 0$ ，切向加速度  $a_C^\tau = \frac{l}{2}\alpha$ 。 $AB$  杆的惯性力系向转轴  $A$  简化，可得一力和一力偶（图 14-9 (b)）。力的大小及力偶矩为

$$F_{IR} = \frac{W}{g} a_C^\tau = \frac{W}{2g} l \alpha \quad M_{IA} = J_A \alpha = \frac{1}{3} \frac{W}{g} l^2 \alpha$$

(3) 列平衡方程求解。对图 14-9 (b) 所示  $AB$  杆的虚平衡状态，由平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad M_{IA} - W \cdot \frac{l}{2} = 0$$

即 
$$\frac{1}{3} \frac{W}{g} l^2 \alpha - W \cdot \frac{l}{2} = 0$$

得 
$$\alpha = \frac{3g}{2l}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{IR} - W = 0$$

得 
$$F_{Ay} = W - \frac{Wl}{2g} \cdot \frac{3g}{2l} = \frac{1}{4} W$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

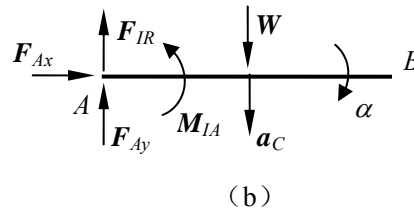
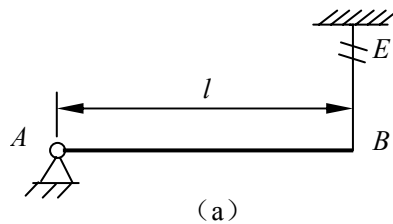


图 14-9

讨论：本题若用动量矩定理和质心运动定理求解，则得

$$\frac{W}{g} a_C = W - F_{Ay}, \quad 0 = F_{Ax}, \quad J_A \alpha = W \cdot \frac{l}{2}$$

显然，这组动力学方程进行移项后就得到了动静法的平衡方程。可见，动静法的实质是通过虚加惯性力，采用列平衡方程的方法而达到了求解动力学问题的目的。

**例 14-5** 图 14-10 (a) 所示提升机构中，悬臂梁  $AB$  重力  $W = 1\text{kN}$ ，长  $l = 3\text{m}$ ；鼓轮  $B$  重为  $Q = 200\text{N}$ ，半径  $r = 20\text{cm}$ ，视其为均质圆盘，其上作用有力偶  $M = 3\text{kN} \cdot \text{m}$ ；



以提升重为  $P = 10\text{kN}$  的物体  $C$ 。不计绳的质量和摩擦，试求固定端  $A$  处的反力。

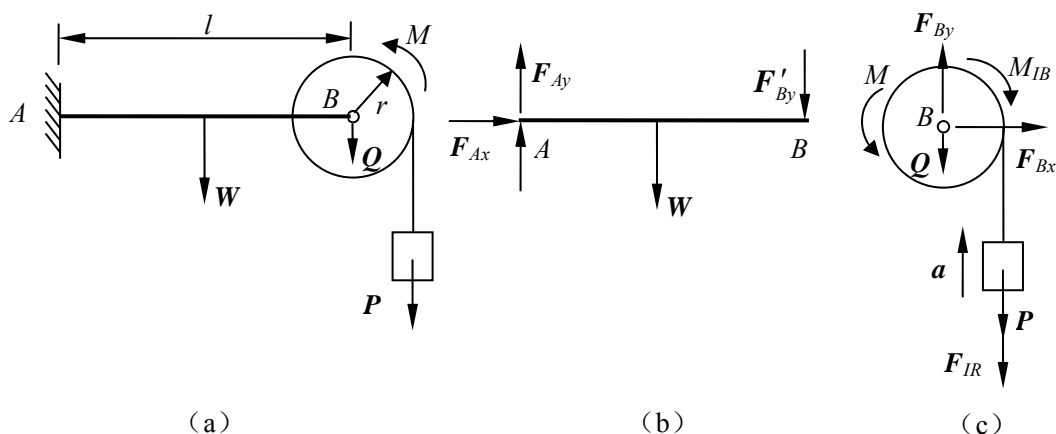


图 14-10

**解** 本题虽然是求固定端  $A$  的反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和  $M_A$ ，但应先求出物体  $C$  的加速度和鼓轮的角加速度。因而先取鼓轮和重物部分为研究对象，应用动静法求物  $C$  的加速度或  $B$  处的反力，然后再以整个系统或梁  $AB$  为研究对象，求出  $A$  处的反力。

(1) 取鼓轮  $B$  及重物  $C$  部分为研究对象，其受主动力  $P$ 、 $Q$  和力偶  $M$  作用； $B$  处的反力为  $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$  (图 14-10 (c))。

(2) 虚加惯性力。物  $C$  作直线平动，设其上升加速度为  $a$ ，其惯性力

$$F_{IR} = \frac{P}{g} a$$

$F_{IR}$  方向与  $a$  相反。鼓轮质心在转轴  $AB$  上，其角加速度  $\alpha = a/r$ ，其惯性力偶矩

$$M_{IB} = J_B \alpha = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2 \cdot \alpha / r = \frac{Qr}{2g} \alpha$$

$M_{IB}$  与  $\alpha$  的转向相反。

(3) 列平衡方程求  $a$  和  $F_{By}$ 。对图 14-10 (c) 的虚平衡受力图，由

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, \quad M - M_{IB} - (P + F_{IR})r = 0$$

即 
$$M - \frac{Qr}{2g} a - Pr - \frac{P}{g} ar = 0$$

解出 
$$a = \frac{M/r - P}{P + Q/2} g = \frac{3/0.2 - 10}{10 + 0.2/2} g = 4.85 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{By} - Q - P - F_{IR} = 0$$

得 
$$F_{By} = Q + P + \frac{P}{g}a = 0.2 + 10 + \frac{10}{9.8} \cdot 4.85 = 15.15 \text{ kN}$$

(4) 取梁  $AB$  为研究对象, 由

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad F_{Ax} &= 0 \\ \sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - W - F'_{By} &= 0 \end{aligned}$$

得 
$$F_{Ay} = W + F_{By} = 1 + 15.15 = 16.15 \text{ kN}$$

由 
$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad M_A - W \cdot \frac{l}{2} - F'_{By}l = 0$$

得 
$$M_A = \frac{1}{2}Wl + F'_{By}l = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + 15.15 \times 3 = 46.95 \text{ kN}$$

**例 14-6** 均质杆  $AB$  长为  $l$ , 重为  $P$ , 用两根绳子悬挂在点  $O$  如图 14-11 (a) 所示。杆静止时, 突然将绳  $OA$  切断, 试求切断瞬时  $OB$  的受力。

**解** 绳  $OA$  切断后,  $AB$  杆将作平面运动。在绳子切断的瞬间,  $AB$  杆的角速度及各点速度均为零, 但杆的角加速度不等于零, 据此特点可确定质心  $C$  的加速度, 然后虚加惯性力系的简化结果, 应用动静法求解。

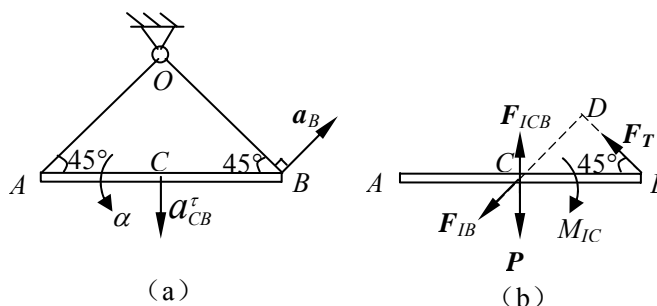


图 14-11

(1) 研究对象的受力分析。取杆  $AB$  为研究对象。绳  $OA$  切断时杆受重力  $P$  和绳  $OB$  的拉力  $F_T$  作用。

(2) 分析运动及虚加惯性力。绳断瞬时, 点  $B$  作圆周运动, 由于  $v_B = 0$ , 而  $a_B = a_B^\tau$ 。取  $B$  为基点, 则杆  $AB$  质心  $C$  的加速度可由基点法表示为

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^\tau$$

由于  $\omega_{AB} = 0$ , 可知  $a_{CB}^n = BC \cdot \omega_{AB}^2 = 0$ , 设  $AB$  杆此时的角加速度为  $\alpha$ , 则有

$$a_{CB}^\tau = BC \cdot \alpha = \frac{l}{2} \alpha. \quad \mathbf{a}_C \text{ 的分矢量如图 14-11 (a) 所示。}$$

杆  $AB$  作平面运动, 向质心  $C$  简化的惯性力及惯性力偶矩分别为

$$\mathbf{F}_{IC} = \mathbf{F}_{IB} + \mathbf{F}_{ICB}, \quad M_{IC} = J_C \alpha = \frac{P}{12g} l^2 \alpha$$

其中 
$$F_{IB} = \frac{P}{g} a_B, \quad F_{IBC} = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \alpha$$

$F_{IB}$ ,  $F_{IBC}$  和  $M_{IC}$  如图 14-11 (b) 所示。

(3) 列平衡方程求解。对杆  $AB$  的虚平衡状态如图 14-11 (b) 所示, 列平衡方程

$$\sum M_O(\mathbf{F})=0, \quad F_{ICB} \frac{l}{4} - P \frac{l}{4} + M_{IC} = 0$$

即

$$\frac{P}{g} \frac{l}{2} \alpha \frac{l}{4} - P \frac{l}{4} + \frac{P}{12g} l^2 \alpha = 0$$

得

$$\alpha = \frac{6g}{5l} \quad (\text{逆时针转向})$$

$$\sum M_C(\mathbf{F})=0, \quad F_T \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - M_{IC} = 0$$

$$F_T \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{12g} l^2 \cdot \frac{6g}{5l} = 0$$

解得

$$F_T = \frac{\sqrt{2}}{5} P$$

讨论 本题可用刚体的平面运动微分方程求解, 但要联解方程组比较麻烦, 而动静法由于合理选择矩心, 使求解简单清晰。

**例 14-7** 长度均为  $l$  和质量均为  $m$  的均质细直杆  $OA$  和  $AB$  以铰链相连, 并以铰链  $O$  悬挂在铅垂平面内, 如图 14-12 (a) 所示。当在图示位置无初速开始运动时, 试求两杆的角加速度。

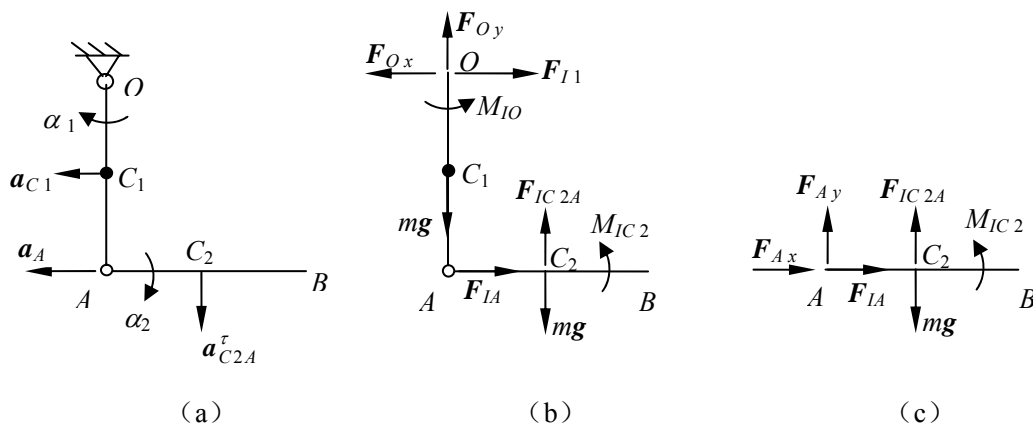


图 14-12

**解** 本题中杆  $OA$  作定轴运动, 杆  $AB$  作平面运动。可按刚体的运动形式分别向转轴  $O$  和质心  $C_2$  虚加惯性力和惯性力偶。杆  $AB$  质心  $C_2$  的加速度应由刚体平面运动时的基点法求得。

(1) 取研究对象与受力分析。研究整体，杆  $OA$  与杆  $AB$  的重力均为  $mg$ ，铰  $O$  处反力以  $F_{Ox}$ ， $F_{Oy}$  表示。

(2) 分析运动与虚加惯性力。系统由静止开始运动，可知此瞬时两杆的角速度及各点的速度均为零。设杆  $OA$  及杆  $AB$  的角加速度分别为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ ，如图 14-12 (a) 所示，在杆  $OA$  的转轴  $O$  处虚加惯性力  $F_{I1}$  和惯性力偶  $M_{I0}$ 。则有

$$F_{I1} = ma_{C1} = m \cdot \frac{l}{2} \alpha_1 \quad M_{I0} = J_O \alpha_1 = \frac{1}{3} ml^2 \alpha_1$$

杆  $AB$  作平面运动，以  $A$  为基点，质心  $C_2$  的加速度，可由基点法得

$$\mathbf{a}_{C2} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{AC2}^{\tau} + \mathbf{a}_{AC2}^n$$

其中， $a_A = l\alpha_1$ ， $a_{AC2}^n = 0$ ， $a_{AC2}^{\tau} = \frac{l}{2} \alpha_2$ 。虚加在质心  $C_2$  的惯性力  $F_{C2}$ ，以分量  $F_{IA}$  及

$F_{IC2A}$  表示，即

$$F_{IA} = ma_A = ml\alpha_1, \quad F_{IC2A} = m \cdot \frac{l}{2} \alpha_2$$

杆  $AB$  对质心  $C_2$  的惯性力偶矩为

$$M_{IC2} = J_{C2} \alpha_2 = \frac{1}{12} ml^2 \cdot \alpha_2$$

虚加惯性力及惯性力偶如图 14-12 (b) 所示。

(3) 列平衡方程求解。

$$\sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \quad M_{I0} + M_{IC2} + (F_{IC2A} - mg) \frac{l}{2} + F_{IA} l = 0$$

即

$$\frac{1}{3} ml^2 \alpha_1 + \frac{1}{12} ml^2 \alpha_2 + \left( \frac{1}{2} ml \alpha_2 - mg \right) \frac{l}{2} + ml \alpha_1 l = 0$$

简化后得

$$4\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3g}{2l} \quad (\text{a})$$

(4) 取杆  $AB$  为研究对象，虚平衡的受力图如图 14-12 (c) 所示。由

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad M_{IC2} + F_{IC2A} \cdot \frac{l}{2} - mg \frac{l}{2} = 0$$

即

$$\frac{1}{12} ml^2 \alpha_2 + \frac{1}{2} ml \alpha_2 \frac{l}{2} - mg \frac{l}{2} = 0$$

解得 
$$\alpha_2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \quad (\text{b})$$

将式 (b) 代入式 (a), 可得

$$\alpha_1 = 0$$

**例 14-8** 均质圆盘质量为  $m_A$ , 半径为  $r$ 。细长杆长  $l=2r$ , 质量为  $m$ 。杆端点  $A$  与轮心为光滑铰接, 如图 14-13 (a) 所示。如在  $A$  处加一水平拉力  $F$ , 使轮沿水平面纯滚动。问:  $F$  力多大能使杆的  $B$  端刚刚离开地面? 又为保证纯滚动, 轮与地面间的静

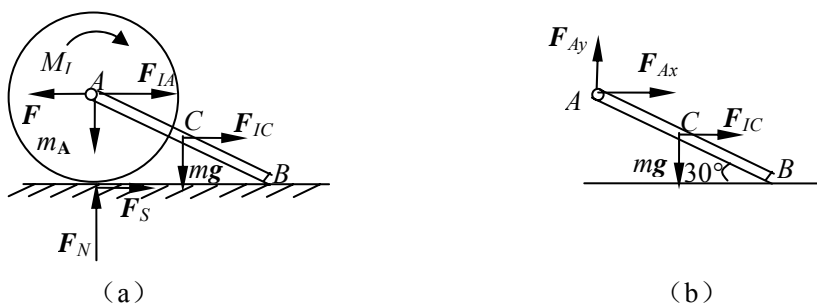


图 14-13

滑动摩擦因数应为多大?

**解** 细杆刚离地面时仍为平动, 而地面约束力为零, 设其加速度为  $a$ 。以杆为研究对象, 杆承受的力及虚加惯性力如图 14-13 (b) 所示, 其中  $F_{IC} = ma$ , 按动静法列方程。

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad mar \sin 30^\circ - mgr \cos 30^\circ = 0$$

解出 
$$a = \sqrt{3} g$$

整个系统承受的力并加上惯性力如图 14-13 (a), 其中  $F_{IA} = m_A a$ ,  $M_I = \frac{1}{2} m_A r^2 \frac{a}{r}$ 。

由方程  $\sum F_y = 0$ , 得

$$F_N = (m_A + m)g$$

地面摩擦力

$$F_S \leq f_S F_N = f_S g (m_A + m)$$

为求摩擦力, 应以圆轮为研究对象, 由方程  $\sum M_A(\mathbf{F}) = 0$ , 得

$$F_S r = M_I = \frac{1}{2} m_A r a$$

解出

$$F_S = \frac{1}{2} m_A a = \frac{\sqrt{3}}{2} m_A g$$

由此, 地面摩擦因数

$$f_S \geq \frac{F_S}{F_N} = \frac{\sqrt{3} m_A}{2(m_A + m)}$$

再以整个系统为研究对象，由方程  $\sum F_x = 0$ ，得

$$F = F_{IA} + F_{IC} + F_S = \left( \frac{3m_A}{2} + m \right) \cdot \sqrt{3} g$$

#### § 14-4 定轴转动刚体轴承的动反力

##### 1. 定轴转动刚体惯性力系的简化

设质量为  $m$  的刚体绕  $z$  轴转动，某瞬时的角速度为  $\omega$ ，角加速度为  $\alpha$ ，取固定于刚体上的动坐标系  $Oxyz$  如图 14-14 (a) 所示，现计算刚体惯性力系的主矢和对坐标原点的主矩。

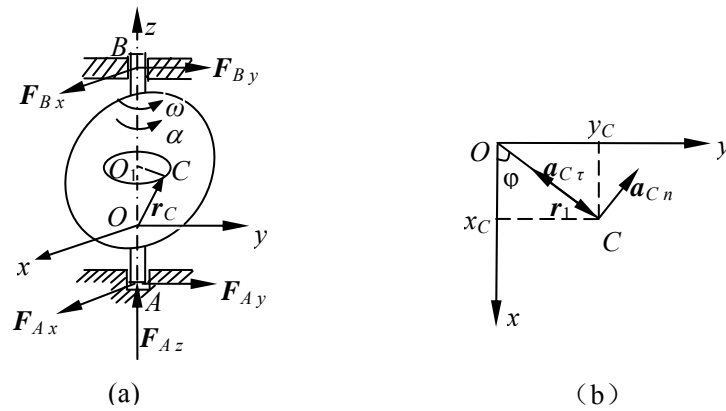


图 14-14

(1) 惯性力系的主矢。定轴转动刚体的惯性力系主矢按式  $F_{IR} = \sum F_I = -Ma_C$  计算。设刚体的质心在点  $C$ ，点  $C$  的转动半径为  $r_1$ ，则  $a_{C\tau} = r_1\alpha$ ， $a_{Cn} = r_1\omega^2$ 。由于  $a_C = a_{C\tau} + a_{Cn}$ ， $a_C$  在  $z$  轴上的投影为零， $a_C$  在  $x$ ， $y$  轴上的投影分别为 (如图 14-14 (b))

$$a_{Cx} = -a_{Cn} \cos \varphi - a_{C\tau} \sin \varphi = -r_1 \omega^2 \frac{x_C}{r_1} - r_1 \alpha \frac{y_C}{r_1} = -x_C \omega^2 - y_C \alpha$$

$$a_{Cy} = -a_{Cn} \sin \varphi + a_{C\tau} \cos \varphi = -r_1 \omega^2 \frac{y_C}{r_1} + r_1 \alpha \frac{x_C}{r_1} = -y_C \omega^2 + x_C \alpha$$

有

$$F_{IR} = -Ma_C = -M(a_{Cn} + a_{C\tau})$$

于是，惯性力系的主矢在  $x$ ， $y$ ， $z$  轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{Ix} &= -Ma_{Cx} = Mx_C \omega^2 + My_C \alpha \\ F_{Iy} &= -Ma_{Cy} = My_C \omega^2 - Mx_C \alpha \\ F_{Iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-13)$$

(2) 惯性力系对原点  $O$  的主矩。惯性力系主矩  $M_{IO}$  在图 14-14 (a) 各坐标轴上的投影, 根据力矩关系定理, 即为各质点惯性力对相应轴之矩的代数和, 而力对轴主矩可由解析式计算。

设刚体内任一质点的质量为  $m$ , 坐标  $x, y, z$ 。则该质点的惯性力在轴上的投影, 类似于式 (14-13), 即

$$F_{Ix} = m(x\omega^2 + y\alpha), \quad F_{Iy} = m(y\omega^2 - x\alpha), \quad F_{Iz} = 0$$

刚体惯性力系对  $x$  轴之矩

$$\begin{aligned} M_{IOx} &= \sum M_x(F_I) = \sum (yF_{Iz} - zF_{Iy}) = \sum [0 - zm(y\omega^2 - x\alpha)] \\ &= -\omega^2 \sum myz + \alpha \sum mxz = -\omega^2 J_{yz} + \alpha J_{zx} \end{aligned}$$

同理, 可得  $M_{IOy}$  及  $M_{IOz}$ 。于是, 可得惯性力系对原点  $O$  的主矩  $M_{IO}$  在各坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} M_{IOx} &= -J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\alpha \\ M_{IOy} &= J_{zx}\omega^2 + J_{yz}\alpha \\ M_{IOz} &= -J_z\alpha \end{aligned} \right\} \quad (14-14)$$

式中,  $J_{yz} = \sum myz$ ,  $J_{zx} = \sum mzx$ 。它们分别是刚体对  $y, z$  轴和对  $z, x$  轴的惯性积, 其值为代数量。 $J_z$  是刚体对  $z$  轴的转动惯量。

若刚体具有质量对称面, 且转轴与该平面垂直时, 可取该平面为  $Oxy$  平面, 则  $J_{yz} = J_{zx} = 0$ , 于是刚体惯性力系简化为对称面内的通过  $O$  点的一力和一力偶, 这正是上节讨论的特殊情况。

## 2. 定轴转动刚体轴承的动反力

以定轴转动刚体为研究对象如图 (14-14a)。设其上作用有主动力  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , 止推轴承  $A$  的约束反力为  $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}$ , 径向轴承  $B$  的约束反力为  $F_{Bx}, F_{By}$ 。虚加上惯性力系向  $O$  点简化的惯性力和惯性力偶, 则刚体处于虚平衡状态。根据空间一般力系的平衡方程, 不难求出这些约束反力。

很明显, 在轴承的约束反力中, 将包括两部分: 一部分是由主动力的静力作用所引起的, 称为静反力; 另一部分是由刚体的转动而引起的, 即包含有  $\omega$  和  $\alpha$  的各项, 称为附加动反力。动反力可在刚体上虚加惯性力后, 由平衡方程确定。

转动刚体与轴承间的力互为作用与反作用关系, 当刚体转动时, 轴承在垂直转轴的方向上将受到周期性变化的动压力 (与动反力等值, 反向, 共线) 的作用, 必引起机器底座产生强烈的振动, 对机器本身及相应的支承系统都非常不利, 如何消除或减少动反力是工程中的一个重大课题。

转动刚体轴承的动反力, 完全取决于刚体惯性力系简化的主矢和对  $O$  点的主矩。若要动反力为零, 则要求惯性力系的主矢和主矩在  $x, y$  轴上的投影同时为零。由式 (14-13) 知, 主矢为零则要求  $x_C = 0$  和  $y_C = 0$ , 即转轴必须通过质心  $C$ ; 由式 (14-14) 知,  $M_{IOx} = M_{IOy} = 0$ , 则必须  $J_{yz} = J_{zx} = 0$ , 即  $z$  轴为惯性主轴。称过质心的惯性轴为中心惯性主轴。因此, 定轴转动刚体轴承动反力为零的条件是: 转轴为刚体的中心惯性主轴。

当刚体绕中心惯性主轴匀速转动时, 惯性力系自成平衡力系, 轴承的动反力为零。

工程上称为动平衡。要实现刚体的动平衡，首先要消除偏心。若使质心在转动轴上，称为静平衡。实际上，可以通过适当地调整刚体的质量分布，而使转轴成为中心惯性主轴，工程中为了实现动平衡，需要在专门的动平衡机上进行实验调整。

**例 14-9** 均质圆盘以匀角速度  $\omega$  绕通过盘心的铅垂轴转动，圆盘平面与转轴夹角为  $\theta$ ，如图 14-15 所示。已知圆盘半径为  $r$ ，重为  $P$ ，轴承  $A$  和  $B$  与盘心相距各为  $l_1$  和  $l_2$ ，试求轴承  $A$  和  $B$  处的反力。

**解** 取圆盘为研究对象，受重力  $P$  及约束反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 、 $F_{Az}$ 、 $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$  作用。

现求惯性力系的主矢和主矩。由于转轴通过圆盘的质心，即  $x_C = y_C = 0$ ，可知圆盘的惯性力主矢  $F_{RI} = 0$ 。由题设知  $\alpha = 0$ ，对固结于圆盘上的  $Cxyz$  坐标系， $Cx$  轴是圆盘的水平径向对称轴，即为盘在点  $C$  的一个惯性主轴，则  $J_{zx} = 0$ ，由式 (14-14) 知，惯性力系主矩在各轴上的投影为

$$M_{IOx} = -J_{yz}\omega^2, \quad M_{IOy} = 0, \quad M_{IOz} = 0$$

为求惯性积  $J_{yz}$ ，取坐标系  $Cx'y'z'$ ，其中  $Cx'$  轴与  $Cx$  轴重合， $Cz'$  轴垂直于圆盘平面， $Cy'$  与  $Cy$  轴的夹角  $\varphi = \theta - 90^\circ$ 。可见  $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$  轴均为圆盘上点  $C$  的惯性主轴。此时则可用公式  $J_{yz} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2} \sin 2\varphi$  来计算  $J_{yz}$

$$\text{因} \quad J_{z'} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2, \quad J_{y'} = \frac{1}{4} \frac{P}{g} r^2, \quad J_{y'z'} = 0$$

$$\text{于是} \quad J_{yz} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} (J_{z'} - J_{y'}) \sin(2\theta - 180^\circ) = -\frac{P}{8g} r^2 \sin 2\theta$$

$$\text{可得} \quad M_{IOx} = -J_{yz}\omega^2 = \frac{1}{8g} Pr^2\omega^2 \sin 2\theta$$

故圆盘的惯性力系简化结果为一个矩为  $M_{IOx}$  的力偶。将此力偶虚加于圆盘上，由平衡方程

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad F_{Ay} + F_{By} = 0 \\ \sum F_z = 0 & \quad F_{Az} - P = 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) = 0 & \quad F_{Ay}l_1 - F_{By}l_2 + M_{IOx} = 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) = 0 & \quad F_{Bx}l_2 - F_{Ax}l_1 = 0 \end{aligned}$$

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0 \quad F_{Az} = P$$

解得

$$F_{Ay} = -F_{By} = \frac{Pr^2\omega^2}{8g(l_1 + l_2)} \sin 2\theta$$

上述结果中， $F_{Az}$  是轴承的静反力，而  $F_{Ay}$  和  $F_{By}$  为轴承的动反力，此动反力组

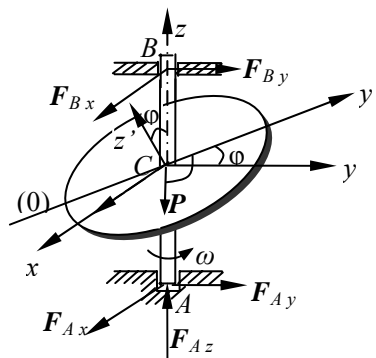


图 14-15



成一个力偶。