

第十五章 虚位移原理

质点系可分为自由质点系和非质点系。如果质点系的各质点不受任何限制，可以在空间自由运动，它们的运动轨迹决定于质点系的外力和内力，则这种质点系称为自由质点系。例如，各星体组成的太阳系。如果质点系的各质点受到一定限制，在空间不能自由运动，它们的位置或速度必须遵循一定的限制条件，则这种质点系称为非自由质点系。例如，用刚杆连接的两质点，它们之间的距离保持不变。在工程实际中，经常遇到的是非自由质点系。

静力学中，以静力学公理为基础，以矢量分析为特点，通过主动力与约束力的关系表达了刚体的平衡条件，称为矢量静力学 (Vectorial statics) 或刚体静力学。刚体的平衡条件对于任意非自由质点系来说，只是必要的，并非充分的。

本章讨论的虚位移原理 (Principle of virtual displacement)，是用数学分析的方法研究任意非自由质点系的平衡问题，平衡条件表现为主动力在系统的虚位移上所做虚功的关系。虚位移原理给出任意非自由质点系平衡的必要与充分条件，是解决质点系平衡问题的普遍原理，可称为分析静力学 (Analytical statics)。

§ 15-1 约束及其分类

1. 约束 (Constraints) 与约束方程 (Constraint equations)

质点系各质点在空间的位置的集合，称为质点系的位形 (Configuration)，位形表示了该系内各质点的位置分布所构成的几何形象。在非自由质点系中，那些预先给定的限制质点系位形或速度的运动学条件称为约束。例如限制刚体内任意两点间的距离不变的条件，限制车轮在直线轨道上滚动而不滑动的条件等都是约束。如果将非自由质点系的运动限制条件用数学方程式表示，则称此方程为质点系的约束方程。

例如，图 15-1 所示单摆，由于刚性摆杆的长度 l 不变，摆锤 A 被限制 xy 平面内作圆周运动，摆锤 A 的坐标满足约束方程

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (\text{a})$$

又如图 15-2 所示的曲柄滑块机构，曲柄销 A 只能在以曲柄长 r 为半径的圆周上运动；滑

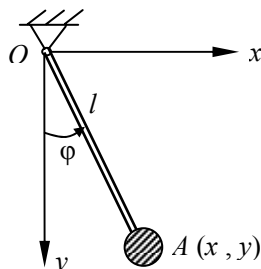


图 15-1

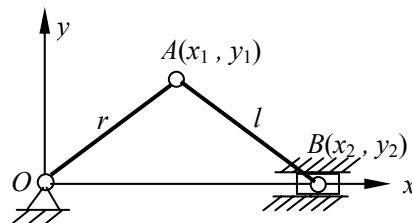


图 15-2

块 B 被限制在水平滑道 Ox 中运动； A 、 B 两点间的距离被连杆的长度 l 所限制。因此，曲柄滑块机构的约束方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= r^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l^2 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

再如图 15-3 所示的圆轮，沿水平直线轨迹作纯滚动，由于轮心 C 作直线运动，约束条件为轮心 C 的坐标 y 保持不变，即

$$y_C = R \quad (c)$$

又因为圆轮作纯滚动，轮心速度 x'_C 与轮的角速度 φ' 必须满足约束方程

$$x'_C - R\varphi' = 0 \quad (d)$$

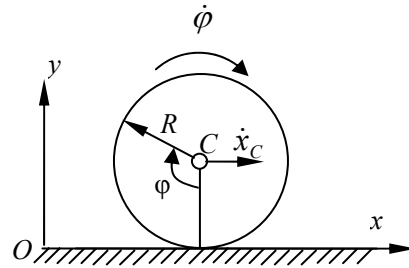


图 15-3

2. 约束分类

根据约束对质点系运动限制条件的不同，可将约束分类如下：

(1) 定常约束 (Steady constraint) 和非定常约束 (Unsteady constraint)。如果在约束方程中不显含时间 t ，即约束不随时间而变，这种约束称为定常约束或稳定约束。以上各例都是定常约束。如果在约束方程中显含 t ，则称其为非定常约束。例如图 15-1 中的单摆，悬挂点 O 若以匀速 v 沿 x 轴向右运动，这时约束方程成为

$$(x - vt)^2 + y^2 = l^2 \quad (e)$$

约束方程中显含时间 t 。可见，悬挂点移动的单摆的约束是非定常约束。

(2) 双面约束 (Bilateral constraint) 与单面约束 (Unilateral constraint)。约束方程中用等号表示的约束，称为双面约束或不可离约束。这种约束能限制两个相反方向的运动，由方程 (a)、(b) 表示的约束都是双面约束。由不等式表示的约束称为单面约束或可离约束。例如图 15-1 中的单摆，将摆杆以细绳代替，因绳子不能受压，约束方程成为

$$x^2 + y^2 \leq l^2 \quad (f)$$

显然，单面约束只能限制物体某个方向的运动，而不能限制相反方向的运动。图 15-3 中轨道对圆轮的约束亦属单面约束。但在实际问题中，质点系没有脱离约束的主动力作用时，单面约束仍理解为具有双面约束的性质。例如单摆在运动过程中，绳不可能受压，绳与杆并无差别。又如沿水平面滚动的圆轮，若脱离轨道而跳起，就是自由刚体的运动，这显然是与研究前提相矛盾的。

(3) 完整约束 (Holonomic constraint) 与非完整约束 (Nonholonomic constraint)。通过以上各例的约束方程，我们已注意到约束不仅对质点系的几何位形起限制作用，而且还

可能与时间、速度有关。因而，约束方程的一般形式可表示为

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n; x'_1, y'_1, z'_1; \dots; x'_n, y'_n, z'_n; t) = 0 \quad (15-1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, s)$$

式中， n 为质点系中质点的个数， s 为约束方程的个数。

约束方程中显含坐标对时间的导数，称为运动约束。如果运动约束能积分成有限形式，则称这种约束为完整约束。例如约束方程 (d)，可以积分为 $x_C - R\varphi = \text{常数}$ ，故为完整约束。约束方程中若不显含坐标对时间的导数，这种约束称为几何约束。几何约束也属完整约束。几何约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (15-2)$$

综上所述，几何约束及可积分的运动约束统称为完整约束。实际上，对于可积分的运动的约束，积分后方程中不再包含坐标的导数，此时的运动约束成为几何约束。因而，在以后的讨论中，对几何约束与完整的约束不再区分。

一般情况下，含有坐标导数的方程不能积分成有限形式，则这种约束称为非完整约束。非完整约束方程的一般形式为式 (15-1)。因为非完整约束方程表现为微分形式，故又称为不可积分约束。应理解为在任意约定的位形中，质点系各点速度应满足的条件。

一个质点系可以同时受到完整和非完整约束，只受完整约束的质点系称为完整系统，只要质点受到非完整约束，则称为非完整系统。如果约束都是定常的，则称质点系为定常系统。否则，称为非定常系统。

特别注意，本章只讨论双面、定常的几何约束。这种约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (15-3)$$

§15-2 虚位移与自由度

1. 虚位移 (Virtual displacement)

由于约束的限制，非自由质点或质点系中的质点，其运动不可能完全自由。即约束限制了质点某些方向的位移，但也容许质点沿另一些方向的位移。因此，我们定义：

质点或质点系在给定位置（或瞬时），为约束所容许的任何无限小位移，称为质点或质点系在该位置的虚位移。质点的虚位移记为

$$\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k} \quad (15-4)$$

式中， δx ， δy ， δz 是虚位移在各直角坐标轴上的投影；而虚角位移用 $\delta\varphi$ 或 $\delta\theta$ 表示。应注意， δ 是变分 (Variation) 符号。 $\delta \mathbf{r}$ 表示函数 $\mathbf{r}(t)$ 的变分，变分表示函数自变量（时间 t ）不变时，由函数本身形状在约束所许可的条件下微小改变而产生的无限小增量。除了 $\delta t = 0$ 之外，变分运算与微分运算相类似。

例如，限制在一个固定平面上的质点 A ，在平面上的任一个方向上的无限小位移都是该质点的虚位移。又如图 15-4(a)中的曲柄滑块机构，在 θ 角时处于平衡。但约束容许杆 OA 绕 O 轴转动，我们可给杆 OA 以逆时针的虚转角 $\delta\theta$ ，杆 OA 转到 OA' 位置，由于杆 AB 的长度不变和滑道对滑块 B 的限制，杆 AB 只能处于 $A'B'$ 位置。于是 $OA'B'$ 表示曲柄滑块机构的虚位移图。系统内的各质点都产生了虚位移，可见，质点系的虚位移是一组虚位移，而且彼此并不独立。应注意，虚位移必须指明给定的位置（或瞬时），不同位置，质点或质点系的虚位移并不相同；其次，虚位移必须为约束所容许，必须是无限小的。否则就可能破坏原质点系的平衡位置，或者改变作用于质点系上主动力的方向。考虑到虚位移的任意性，我们也可给杆 OA 以顺时针的虚转角 $\delta\theta$ ，此时，曲柄滑块机构的虚位移图为 $OA''B''$ (见图 15-4(b))。

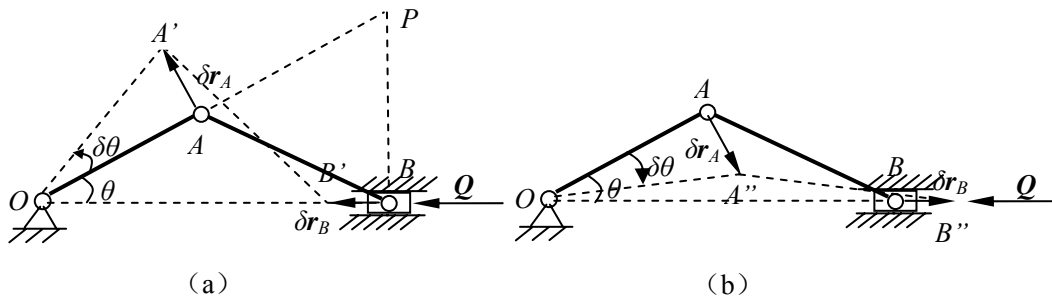


图 15-4

必须强调，虚位移纯粹是一个几何概念，所谓“虚”主要反映了这种位移的人为假设性，并非真实的位移。众所周知，处于静止状态的质点系，根本就没有实位移。但可以在系统的约束所容许的前提下，给定系统的任意虚位移。同时虚位移又完全取决于约束的性质及其限制条件，而不是虚无缥缈，也不可随心所欲地假设。

若质点系在某位置受主动力作用，使系统处于运动状态。这时系统的实位移，将取决于作用于系统上的主动力以及所经历的时间，其位移可以是无限小的，也可以是有限值，其方向是惟一的。而质点系在该位置时的虚位移与主动力和时间无关，虚位移只能是无限小值，方向却可以不止一个。这就是虚位移与实位移的区别所在。但在定常约束条件下，质点系在某位置所发生的微小实位移必是其虚位移中的一个（或一组）。因为质点的虚位移和其无限小实位移都受约束限制，是约束所容许的位移。

2. 自由度 (Degree of freedom)

由于约束的限制，质点系内各质点的虚位移并不独立。那么，一个非自由质点系究竟有多少个独立的虚位移？于是，把质点系独立的虚位移（或独立坐标变分）数目，称为质点系的自由度。因为每个独立的虚位移反映了系统一个独立的虚位移形式，自由度数就反映了系统独立的虚位移形式的数目。例如图 15-4 中的曲柄滑块机构，独立的虚位移可为 $\delta\theta$ ， $\delta\theta$ 一旦给定，系统的虚位移形式（虚位移图）就完全确定了，而且任一点的虚位移都可以用 $\delta\theta$ 表示。

具有定常几何约束的质点系，设质点系包括 n 个质点，受到 s 个约束，约束方程为式

(15-3), 即

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

对约束方程求一阶变分, 则得

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (15-5)$$

式(15-5)表示, 给质点系的虚位移时, 质点系 $3n$ 个质点的坐标变分应满足 s 个方程, 也就是说, 只有 $3n - s$ 个变分是独立的。它正好等于质点独立坐标的数目。因此, 对于具有定常几何约束的质点系, 确定其几何位置的独立坐标的数目, 亦称为质点系的自由度。

3. 广义坐标 (Generalized coordinates)

在许多实际问题中, 采用直角坐标法确定系统的位形并不方便。如上所述, 我们可取 $3n - s$ 个独立的参数便能完全确定系统的位形, 这些定参数可以是长度、角度、弧长等。能够完全确定质点系位形的独立参数, 称为系统的广义坐标。对于定常的几何约束系统, 显然, 广义坐标的数目就等于系统的自由度。

对于我们所讨论的定常的完整系统, 如系统具有 $k = 3n - s$ 个自由度, 广义坐标以 $q_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 表示, 则任一瞬时系统中每一质点的矢径和直角坐标都可以表示为广义坐标的函数, 即

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15-6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15-7)$$

图 15-5 表示一个在 Oxy 面内运动二级摆。这个质点系由两个质点组成, 受到两个几何约束, 其约束方程为

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \quad (g)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \quad (h)$$

所以, 该质点系的广义坐标数 (或自由度数) 为

$$k = 2n - s = 2$$

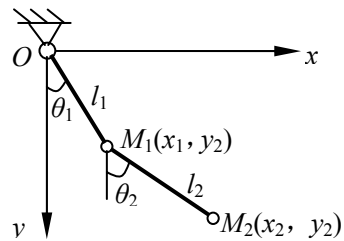


图 15-5

系统的位置用两个独立的参变量给定。按照约束方程 (g) 和 (h), 两个广义坐标可以从 x_1 和 y_1 中选一个, 另一个在 x_2 和 y_2 中选取。也可以选取角 φ_1 和 φ_2 作为系统的广义坐标, 因为按照约束条件, φ_1 和 φ_2 是相互独立的, 且一旦给定了 φ_1 和 φ_2 , 则质点 M_1 和

M_2 的位置就能惟一地确定。

总之，对于一个给定的非自由质点系，其广义坐标的个数是确定的，但广义坐标的取法则可有不同。

又如，图 15-6 中所示的曲柄滑块机构，它在 Oxy 面内运动。曲柄 OA 作定轴转动，需要用一个独立参数确定其位置；连杆 AB 作平面运动，需要用三个独立参数确定其位置，两个刚体则需要四个独立的参数确定其位置。但对曲柄滑块机构来说受到如下三个几何约束的限制

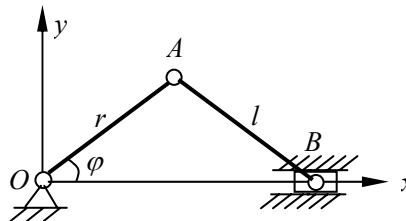


图 15-6

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= r^2 \\ (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 &= l^2 \\ y_B &= 0 \end{aligned}$$

因此，曲柄滑块机构的广义坐标只有一个。可以选取曲柄 OA 的转角 φ 作为广义坐标，也可以取滑块 B 的坐标 x_B 作为广义坐标，等等。

4. 虚位移分析

由于质点系的虚位移中，各质点的虚位移并不独立，正确分析并确定各主动力作用点的虚位移将成为解题的关键。根据具体问题给定的条件，可选用下列方法分析质点系的虚位移。

(1) 几何法。应用几何学或运动学的方法求各点虚位移间的关系，称为几何法。在几何法中，首先应根据系统的约束条件，确定系统的自由度，给定系统的虚位移，并正确画出该系统的虚位移图，然后应用运动学的方法求有关点虚位移间的关系。在运动学中质点的无限小位移与该点的速度成正比，即 $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ 。因此，两质点无限小位移大小之比等于两点速度大小之比。如果把对应于虚位移的速度称之为虚速度，则两质点虚位移大小之比必等于对应点虚速度大小之比。这样，就可以应用运动学中的速度分析方法（如瞬心法、速度投影法、速度合成定理等）去建立虚位移间的关系。这种方法也称为虚速度法。例如图 15-4 (a) 中，连杆 AB 作平面运动，其瞬心为 P ， A 、 B 两点虚位移大小之比为

$$\frac{\delta \gamma_A}{\delta \gamma_B} = \frac{AP \cdot \delta \theta}{BP \cdot \delta \theta} = \frac{AP}{BP}$$

(2) 解析法。解析法是指通过变分运算建立虚位移间的关系。若已知质点系的约束方程，通过变分运算可得虚位移投影间的关系如式 (15-5)。一般情况下，将质点系中各质点的矢径或直角坐标先表示为广义坐标的函数，如式 (15-6) 或式 (15-7)，通过一阶变分，可得

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (15-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n) \quad (15-9)$$

式中, δx_i 、 δy_i 、 δz_i 、 δq_i 分别为坐标 x_i 、 y_i 、 z_i 、 q_i 的变分, δq_i 称为广义虚位移 (Generalized virtual displacement)。

§ 15-3 虚位移原理

在研究虚位移原理时, 我们先建立虚功与理想约束的概念。

1. 虚功 (Virtual work)

作用于质点上的力在其虚位移上所作的功称虚功。设作用于质点上的力 \mathbf{F} , 质点的虚位移为 $\delta \mathbf{r}$, 则力 \mathbf{F} 在虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 上的虚功 δW 为

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (15-10)$$

由于虚位移是元位移, 所以虚功只有元功的形式, 其计算同力在真实小位移上所做的元功。虚功强调了力与位移的彼此独立性。

2. 理想约束 (Ideal constraint)

在动能定理中, 我们曾经讨论过理想约束, 现在给出确切定义: 若约束反力在质点系的任一组虚位移上所作虚功之和等于零, 则称此约束为理想约束。设第 i 个质点的反力为 \mathbf{F}_{Ni} , 虚位移为 $\delta \mathbf{r}_i$, 理想约束条件可表示为

$$\sum \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (15-11)$$

一般常见的理想约束包括: 光滑支承面, 各种光滑铰链、轴承、铰链支座, 无重刚杆及不可伸长的柔索, 刚体纯滚动时的支承面等。理想约束反映了约束的基本力学特性, 无论是静力学问题或是动力学问题同样适用。理想约束是对实际约束在一定条件下的近似而已。

今后若无特别说明, 非自由质点系则一概视为具有理想约束的质点系, 对于哪些需要考虑虚功的约束反力 (如滑动摩擦力) 则按主动力处理。

3. 虚位移原理

虚位移原理是分析力学的普遍原理之一, 在求解静力学问题中有着广泛的应用。虚位移原理可陈述为:

具有双面、定常、理想约束的静止质点系, 其继续保持静止的充分与必要条件是: 所有主动力在质点系任何虚位移上的虚功之和等于零。即

$$\sum \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (15-12)$$

或
$$\sum (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) = 0 \quad (15-13)$$

式 (15-12) 和式 (15-13) 称为虚功方程 (Equation of virtual work)。虚功方程又称为静力学普遍方程。虚位移原理是虚功原理之一。现对原理的必要性和充分性给出证明。

必要性证明：已知质点系处于静止状态，证明式 (15-12) 必然成立。因为系统处于静止状态，则系统内每个质点必须处于静止。系统内任一质点的主动力 \mathbf{F}_i 和约束反力 \mathbf{F}_{Ni} 应满足平衡条件

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni} = 0$$

给系统一组虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，每个质点上作用力虚功之和等于零。即

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

对全体求和，得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i)$$

对于理想约束 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ，代入式 (i)，得

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

必要性得证。

充分性证明：若条件式 (15-12) 成立，证明系统必继续保持静止。采用反证法。设在式 (15-12) 的条件下，系统不平衡，则有些质点（至少一个）必进入运动状态。因质点系原来处于静止，一旦进入运动状态，其动能必然增加，即在实位移 $d\mathbf{r}$ 中， $dT > 0$ 。根据质点系动能定理的微分形式，有

$$dT = \sum d'W = \sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni}) \cdot d\mathbf{r}_i > 0 \quad (j)$$

对于定常的双面约束，可取微小实位移作为虚位移，即 $\delta \mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i$ 。于是式 (j) 成为

$$\sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ni}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0$$

对于理想约束， $\sum \mathbf{F}_{Ni} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ，则

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i > 0$$

这与题设条件式 (15-12) 相矛盾。因此, 质点系中的每一个质点必须处于静止状态, 这就证明了原理的充分性。

§ 15.4 虚位移原理的应用

应用虚位移原理可以求解静力学的各种问题: 求系统平衡时主动力之间的关系; 确定系统的平衡位置; 求静定结构的约束反力。应注意, 虚位移原理中并不包含约束反力。欲求某一约束反力时应将该处的约束解除, 代以约束反力, 并视其为主动动力, 这样使系统具有一定的自由度, 就可应用虚位移原理求解。

应用虚位移原理解题的一般步骤是: ①以整个系统为对象, 分析主动力。②分析系统的自由度, 给出系统的虚位移, 求虚位移间的关系。③列虚功方程求解。

例 15-1 图 15-7 所示机构中, 曲柄 OA 上作用有力偶 M , 滑块 D 上作用水平力 P , 机构处于平衡。设曲柄长 $OA = r$, θ 角已知, 不计摩擦, 试求 P 与 M 间的关系。

解: 本题是求系统平衡时主动力间的关系, 系统具有理想定常约束, 可应用虚位移原理解。

(1) 取系统为研究对象, 受主动力 P 和力偶 M 作用。

(2) 系统具有一个自由度, 即具有一个独立的虚位移。取杆 OA 虚转角 $\delta\varphi$ 为独立虚位移。杆 OA 和杆 BC 作定轴转动, 杆 AB 与杆 BD 作平面运动。 A 、 B 、 D 点的虚位移如图 15-7 所示。根据虚速度法, 则有

$$\delta\gamma_A = r\delta\varphi \quad \delta\gamma_A \cos\theta = \delta\gamma_B \cos 2\theta$$

$$\delta\gamma_B \cos(90^\circ - 2\theta) = \delta\gamma_B \sin 2\theta = \delta\gamma_D \cos\theta$$

可得力 P 作用点的虚位移

$$\delta\gamma_D = 2\delta\gamma_B \sin\theta = 2\delta\gamma_A \sin\theta \cos\theta / \cos 2\theta = r\delta\varphi \tan 2\theta$$

(3) 根据虚功方程 $\sum \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, 得

$$M \delta\varphi - P \delta r_D = 0$$

$$\text{即} \quad M \delta\varphi - Pr \delta\varphi \tan 2\theta = 0$$

由于 $\delta\varphi$ 的独立性, 则得

$$M = Pr \tan 2\theta$$

讨论 本题若用静力学方法求解, 必须将系统拆开, 也必出现内约束反力, 求解较烦。

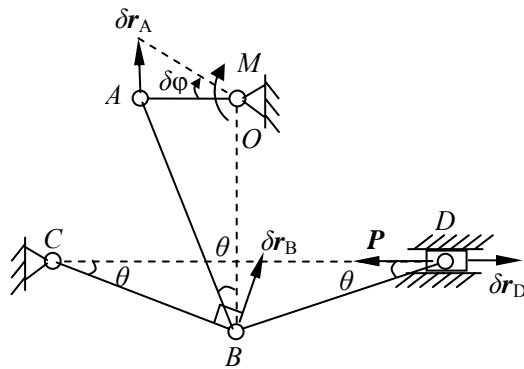


图 15-7

而虚位移原理以整体为研究对象，不出现约束反力，这正是分析静力学的优点。

例 15-2 图 15-8 所示机构中，杆 AB 与 BC 的长度均为 l ， B 点挂有重为 W 的重物， D 、 E 两点用弹簧连接，且 $BD = BE = b$ 。已知弹簧原长为 l_0 ，刚度系数为 k ，不计各杆自重，试求机构的平衡位置（以 θ 表示）。

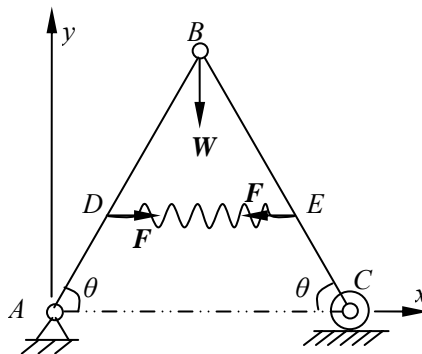


图 15-8

解 本题为求系统的平衡位置，系统的约束为定常理想约束，可应用虚位移原理求解。但应注意，弹簧的内力在 D 、 E 两点的相对虚位移上作功。

(1) 以机构系统为研究对象。作功的力有重力 W 和弹簧的内力。在平衡位置时，弹簧的变形量 $\lambda = 2b \cos \theta - l_0$ ， E 、 D 两点的弹性力的大小为

$$F = k \lambda = k(2b \cos \theta - l_0)$$

(2) 机构有一个自由度，取 θ 角为广义坐标。以 x_{ED} 表示 E 、 D 两点间的相对坐标，应用解析法求虚位移。对图示 Axy 坐标系

$$y_B = l \sin \theta, \quad x_{ED} = 2b \cos \theta$$

对上式作一阶变分，得

$$\delta y_B = l \cos \theta \delta \theta, \quad \delta x_{ED} = -2b \sin \theta \delta \theta$$

(3) 根据虚功方程 $\sum \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ 。则得

$$-W \delta y_B - F \delta x_{ED} = 0$$

即

$$-W l \cos \theta \delta \theta - k(2b \cos \theta - l_0)(-2b \sin \theta) \delta \theta = 0$$

由于 $\delta \theta$ 的独立性，可得

$$\tan \theta (2b \cos \theta - l_0) = W l / 2b k$$

讨论 (1) 关于弹簧的内力作功，也可将弹簧去掉，在点 D 和点 E 代以弹性力，则按主动力计算弹性力的功，这是一般常用的方法。

(2) 虚位移也可几何法计算，但功的计算较烦。请读者按几何法分析各力作用点的虚位移。

例 15-3 多跨静定如图 15-9 (a) 所示。求在荷载 P 、 Q 作用下，支座 D 的约束反力。已知 $P = 10\text{kN}$ ， $Q = 20\text{kN}$ ，图中的长度单位为 m 。

解 图 (a) 所示的梁的自由度数等于零，不存在任何为约束所允许的位移。为了用

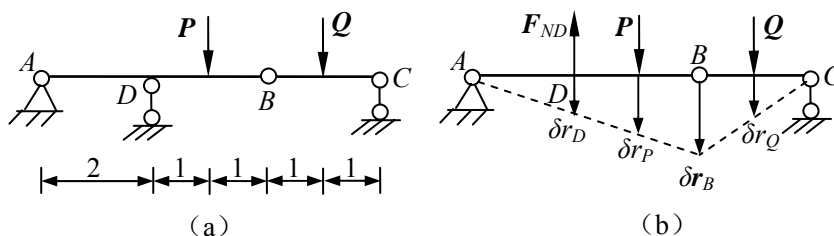


图 15-9

虚位移原理求解支座 D 的约束反力，将支座 D 解除，代之以约束反力 F_{ND} ，得到如图 (b) 所示的具有一个自由度的系统。取 B 点的竖向位移作广义坐标，给 B 点以虚位移 δr_B ，在系统的虚位移中，杆 AB 绕 A 点作无限小转动，杆 BC 以 C 点为瞬心作无限小转动。主动力 P 、 Q 、 F_{ND} 作用点的虚位移分别为 δr_P 、 δr_Q 、 δr_D 。

由几何条件不难将 δr_P 、 δr_Q 、 δr_D 表示为广义坐标变分 δr_B 的函数：

$$\delta r_Q = \frac{1}{2} \delta r_B, \quad \delta r_P = \frac{3}{4} \delta r_B, \quad \delta r_D = \frac{1}{2} \delta r_B$$

按虚位移原理，有

$$P \delta r_P + Q \delta r_Q - F_{ND} \delta r_D = 0$$

即

$$\left(\frac{3}{4} P + \frac{1}{2} Q - \frac{1}{2} F_{ND} \right) \delta r_B = 0$$

解得

$$F_{ND} = \frac{3}{2} P + Q = 35 \text{ kN}$$

例 15-4 在图 15-10(a) 所示的结构中，已知 $M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ， $P = 10 \text{ kN}$ ， $q = 1 \text{ kN/m}$ 。试求固定端 A 的反力偶和支座 C 的反力。

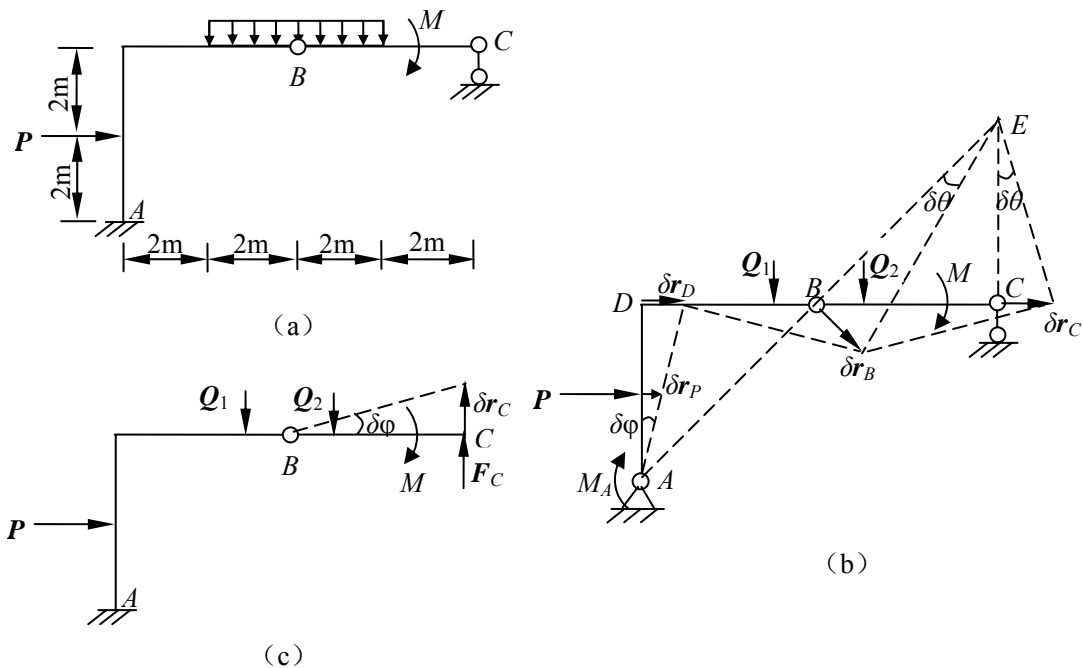


图 15-10

解 本题结构为静定结构，其自由度为零。欲求某处反力时，可解除该处约束，而代

以相应的未知力，并视其为主动动力计算虚功，仍由虚位移原理求解。一般情况下，每次只解除与某个未知力相应的约束，使系统成为一个自由度，以便分析有关虚位移间的关系。

(1) 求固定端 A 的反力偶。将固定端 A 的转动约束解除，而代之以反力偶，则杆可绕 A 转动，但不能沿任何方向移动，因此应将固定端以固定铰支座代替。此时系统具有一个自由度，杆 AB 作定轴转动，杆 BC 可作平面运动。

给杆 AB 以虚转角 $\delta\varphi$ ， B 点虚位移

$$\delta\gamma_B = AB \cdot \delta\varphi$$

杆 BC 作平面运动，其速度瞬心在 E ，设杆 BC 虚转角 $\delta\theta$ 如图 15-10 (b) 所示。点 B 虚位移为

$$\delta\gamma_B = BE \cdot \delta\theta = AB \cdot \delta\varphi$$

由图示的几何关系， $AB = BE$ ，得

$$\delta\theta = \delta\varphi$$

作功的力有 P 和均布荷载等效的合力 Q_1 和 Q_2 以及 M 和 M_A 。计算力偶的虚功时，采用力矩乘以相应的虚转角，若力矩与虚转角的转向一致时，虚功取正号，反之则取负号。于是，可得虚功方程为

$$M_A \delta\varphi + 2P\delta\varphi + 3Q_1\delta\varphi + 3Q_2\delta\varphi - M\delta\theta = 0$$

注意到 $\delta\theta = \delta\varphi$ ， $Q_1 = Q_2 = 2q = 2\text{kN}$ ，并代入 P 、 M 的值，可得

$$M_A = M - 2P - 12 = -20\text{kN} \cdot \text{m}$$

式中，负号表示反力偶的转向与假设相反，即为逆时针方向。

(2) 求反力 F_C 。将可动铰支座 C 去掉，代以反力 F_C (见图 15-10 (c))， AB 部分仍为静定结构，杆 BC 只能绕 B 铰作定轴转动。

给 BC 杆虚转角 $\delta\varphi$ (见图 15-10 (c))， C 点的虚位移

$$\delta\gamma_C = BC \cdot \delta\varphi = 4\delta\varphi$$

由虚功方程，可得

$$F_C \delta\gamma_C - Q_2 \times 1 \times \delta\varphi - M\delta\varphi = 0$$

即

$$4F_C \delta\varphi - 2\delta\varphi - 12\delta\varphi = 0$$

因为 $\delta\varphi \neq 0$ ，求得

$$F_C = 14 / 4 = 3.5\text{kN}$$

讨论 求静定结构的反力时，解除约束一定要与所求的未知量相对应。例如本题中若欲求固定端的水平及竖向反力，只能分别解除其水平及竖向约束，应将固定端以图 15-11 所示的定向支座代替，并在去掉约束处代以相应的反力。

例 15-5 图 15-12 (a) 所示桁架中， $AB = BC = AC = l$ ， $AD = DC = l/\sqrt{2}$ ，节点 D 作用有铅垂力 P 。试求杆 BD 的受力。

解 本题是求静定桁架杆的内力，可将该桁架杆切断，并

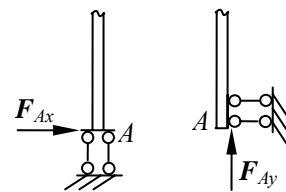


图 15-11

代以内力 N 、 N' ，并视其为主动力，则应用虚位移原理可以求解。

(1) 研究整个桁架。切断杆 BD 后，系统受力为 P 和 N 、 N' （见图 15-12 (b)。）

(2) 由于切断杆 BD 后，系统具有一个自由度。可取杆 AD 与图示 x 轴的夹角 θ 为广义坐标。对图 15-12

(b) 的坐标系，铅垂力作用点的坐标为

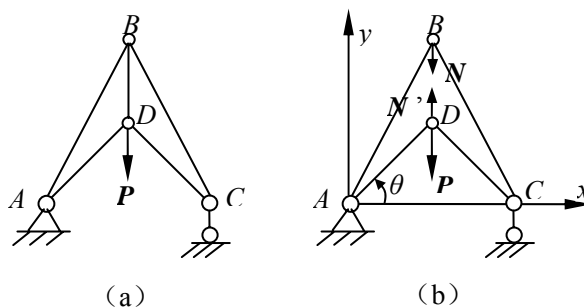


图 15-12

$$y_D = AD \sin \theta = \frac{l}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$y_B = \sqrt{AB^2 - (AD \cos \theta)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2} \cos^2 \theta} = \frac{l}{2} \sqrt{3 - \cos 2\theta}$$

对上式进行一阶变分，得

$$\delta y_D = \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta y_B = \frac{l}{2} \frac{-\frac{1}{2}(-\sin 2\theta) \times 2 \delta \theta}{\sqrt{3 - \cos 2\theta}} = \frac{l}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3 - \cos 2\theta}} \delta \theta$$

(3) 根据虚功方程，可得

$$(N' - P) \delta y_D - N \delta y_B = 0$$

即

$$(N' - P) \frac{l}{\sqrt{2}} \cos \theta \delta \theta - N \frac{l}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3 - \cos 2\theta}} \delta \theta = 0$$

由于 $N = N'$ ， $\delta \theta \neq 0$ ，可得

$$N \left(1 - \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{3 - \cos 2\theta}} \right) = P$$

在静平衡位置，由图示的几何关系，有

$$\cos \theta = \frac{l/2}{AD} = \frac{l/2}{l/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因而 $\theta = 45^\circ$ 。于是，杆 BD 的内力为

$$N = \frac{P}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} P = 2.37P \text{ (拉力)}$$

讨论 (1) 若用结点法或截面法求杆 BD 内力，读者试列出解题步骤。

(2) 如何应用几何法求虚位移?

§ 15-5 广义坐标形式的虚位移原理

1. 广义坐标形式的虚位移原理

将式 (15-8)

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

代入虚功方程
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

可得
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0$$

交换式中 i, j 的求和顺序有
$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (15-14)$$

令
$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

则式 (15-14) 成为
$$\sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = 0 \quad (15-15)$$

式 (15-15) 称为广义坐标形式的虚位移原理。由于 δq_j 是系统对应于广义坐标 q_j 的广义虚位移, 而 $Q_j \delta q_j$ 具有功的量纲, 因此 Q_j 称为对应广义坐标 q_j 的广义力 (Generalized force)。当 δq_j 是长度单位时, 则 Q_j 为力的单位; 当 δq_j 是角度单位时, 则 Q_j 为力矩的单位。

对于完整系统, 各个广义坐标的变分独立, 故由式 (15-15) 可得

$$Q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (15-16)$$

这就是广义坐标形式的平衡方程。可表述为: 具有双面、定常、理想约束的质点系, 平衡的必要和充分条件是: 在给定的平衡位置上, 系统的所有广义力都等于零。应用此原理可以求解具有任意个自由度的质点系平衡问题。

2. 广义力的计算

应用式 (15-16) 求解平衡问题时, 关键是如何正确快速地计算对应于广义坐标的广义力。一般情况下, 广义力可选用下述三种方法之一计算。

(1) 按定义计算。由定义式 (15-14)

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (15-17)$$

式中, F_{ix} 、 F_{iy} 、 F_{iz} 为质点 m_i 所受的主动动力 \mathbf{F}_i 在各直角坐标轴上的投影, 力 \mathbf{F}_i 作用点的坐标为广义坐标的函数。这种方法也称为解析法。

(2) 虚功法。对于完整系统, 广义力的虚功之和以 $\sum \delta W$ 表示, 则有

$$\sum \delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_k \delta q_k = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j \quad (15-18)$$

式中, $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_k$, 彼此相互独立, 因此欲求某个广义力 Q_j 时, 可以取一组特殊的广义虚位移, 为此, 令 $\delta q_j \neq 0$, 而令其余 $\delta q_l = 0 (l \neq j)$, 这时式 (15-18) 成为

$$\sum \delta W_j = Q_j \delta q_j$$

式中, $\sum \delta W_j$ 表示仅当 δq_j 非零时系统上主动力的虚功之和。于是, 可得对应于广义坐标的广义力为

$$Q_j = \frac{\sum \delta W_j}{\delta q_j} \quad (j=1, 2, \cdots, k) \quad (15-19)$$

(3) 势能法。若作用于系统的主动动力都是有势力, 这时系统的势能函数可表示为

$$V = V(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n) = V(q_1, q_2, \cdots, q_k)$$

任一质点 M_i 的有势力在直角坐标上的投影

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (15-20)$$

将式 (15-20) 代入式 (15-17), 得

$$Q_j = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

即
$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \cdots, k) \quad (15-21)$$

于是, 对于保守系统, 对应于每个广义坐标的广义力等于势能函数对该坐标的偏导数并冠以负号

在一般情况下, 应用虚功法计算广义力比较简单。

例 15-6 图 15-13 (a) 所示系统中, 杆 OA 和 AB 长度均为 l , 不计自重, 在杆件所在的平面内作用有矩为 M 的两力偶及水平力 P , 系统处于平衡。求平衡位置时的 θ_1 和 θ_2 。

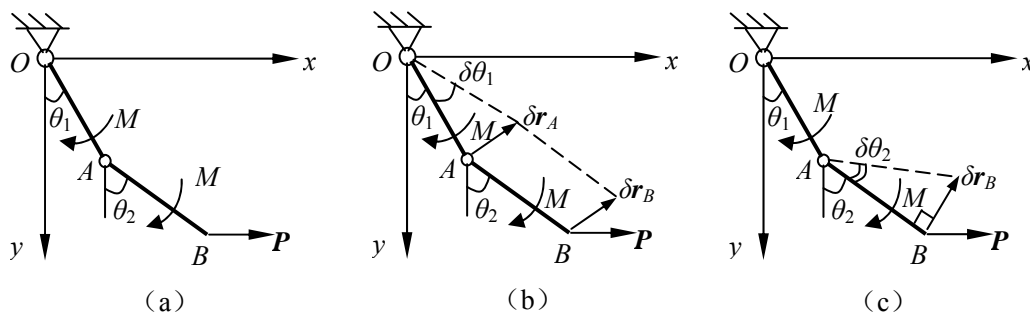


图 15-13

解 此系统具有二个自由度, 可取角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。属求主动力作用下的平衡位置问题, 现应用广义坐标形式的虚位移原理求解。

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0$$

(1) 取两杆系统为研究对象。

(2) 由于广义坐标的独立性, 给杆 OA 以虚转角 $\delta\theta_1$, 而令 θ_2 保持不变, 即 $\delta\theta_2 = 0$ 。此时杆 OA 作定轴转动, 杆 AB 作平动, 系统的虚位移如图 15-13 (b) 所示。力 P 作用点的虚位移

$$\delta\gamma_B = \delta\gamma_A = l\delta\theta_1$$

系统上主动力的虚功之和

$$\sum \delta W_1 = -M\delta\theta_1 + P\delta\gamma_B \cos\theta_1 = -M\delta\theta_1 + Pl \cos\theta_1 \delta\theta_1 = 0$$

由
$$Q_1 = \frac{\sum \delta W_1}{\delta\theta_1} = -M + Pl \cos\theta_1 = 0$$

得
$$\cos\theta_1 = \frac{M}{Pl}$$

或
$$\theta_1 = \arccos \frac{M}{Pl}$$

(3) 给杆 AB 以虚转角 $\delta\theta_2$, 而令 $\delta\theta_1 = 0$ 。此时杆 AB 作定轴转动, 系统虚位移示于图 15-13 (c)。可知

$$\delta\gamma_B = l\delta\theta_2$$

$$\sum \delta W_2 = -M\delta\theta_2 + P\delta\gamma_B \cos\theta_2 = -M\delta\theta_2 + Pl \cos\theta_2 \delta\theta_2$$

由
$$Q_2 = \frac{\sum \delta W_2}{\delta \theta_2} = -M + Pl \cos \theta_2 = 0$$

得
$$\theta_2 = \arccos \frac{M}{Pl}$$