

## 第十七章 振动基本理论

振动是自然界最普遍的现象之一。在许多情况下，振动被认为是消极因素。例如，振动会加剧机械设备的磨损，缩短设备和结构的使用寿命，引起结构的破坏。然而振动也有它积极的一面。

例如，振动沉桩、振动筛选，振动传输等，都是利用振动的生产装备和工艺。我们研究振动的目的，就是要避免或消除它的消极方面，而利用它的积极方面，使振动在工程技术中更好地发挥它的作用。

本章仅限于讨论单自由度系统的振动。

### § 17-1 单自由度系统的自由振动

在研究振动问题时，往往可把具体的振动系统抽象为一个质量和一个弹簧的弹簧质量系统，如图 17-1 所示。弹簧的质量略去不计，该系统具有一个自由度，在重力影响下沿铅垂方向振动。为分析其运动规律，先列出其运动微分方程。

#### 1. 自由振动 (Free vibration) 微分方程

设物块的质量为  $m$ ，弹簧原长为  $l_0$ ，刚度系数为  $k$ 。物块在平衡位置时，弹簧的变形为  $\delta_{st}$ ，称为静变形。平衡时，重力  $P$  与弹性力相等，即  $P = mg = \delta_{st}$

由此可得弹簧的静变形为

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad (17-1)$$

取物块的静平衡位置（振动中心）为坐标原点， $x$  轴沿垂向下，当物块在任意位置  $x$  处时，弹簧对物块的作用力大小为  $F = k(\delta_{st} + x)$

阻力（振动问题中称阻尼）略去不计，根据牛顿第二定律，物块的运动微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(\delta_{st} + x)$$

将式 (17-1) 代入上式，可得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

令  $\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (17-2)$

可得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0 \quad (17-3)$$

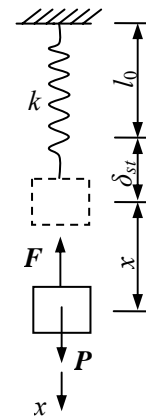


图 17-1

式(17-3)为单自由度系统无阻尼自由振动微分方程的标准形式。它是一个二阶常系数齐次微分方程。其解为

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (17-4)$$

式中  $C_1$ 、 $C_2$  为积分常量，可由运动初始条件确定。

式(17-4)对时间  $t$  求导数，可得物块在任意瞬时的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -C_1 \omega_n \sin \omega_n t + C_2 \omega_n \cos \omega_n t$$

当  $t=0$  时， $x=x_0$ ， $v=v_0$ ，可求出积分常量

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

为了便于研究自由振动的规律及特性，令

$$C_1 = A \sin \theta, \quad C_2 = A \cos \theta$$

则式(17-4)可写成

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta) \quad (17-5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \\ \tan \theta &= \frac{\omega_n x_0}{v_0} \end{aligned} \right\} \quad (17-6)$$

由式(17-5)可知无阻尼自由振动是简谐振动，其运动图线如图 17-2 所示。

## 2. 自由振动的特点

(1) 周期与频率。由式(17-5)可知，物体的无阻尼自由振动是周期运动，设周期为  $T$ ，有  $x(t) = x(t+T)$ ，如图 17-2 所示。式(17-5)中正弦函数的角度周期为  $2\pi$ ，即

$$\omega_n(T+t) + \theta - (\omega_n t + \theta) = 2\pi$$

可得无阻尼自由振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (17-7)$$

无阻尼自由振动的频率为

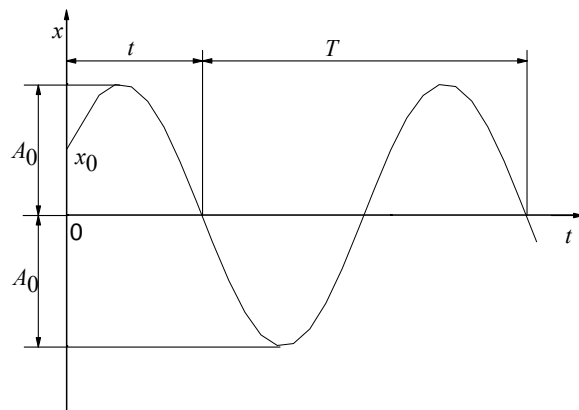


图 17-2

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (17-8)$$

由上式可求

$$\omega_n = 2\pi f \quad (17-9)$$

表示物体在  $2\pi$  秒内振动的次数，称为圆频率 (Circular frequency)。由式 (17-2) 可知  $\omega_n$  只与系统本身的质量  $m$  及刚度  $k$  有关，而与运动的初始条件无关，是振动系统的固有特性，所以称  $\omega_n$  为固有圆频率 (一般也称固有频率 (Natural frequency))。其单位与频率  $f$  相同，为赫兹 (Hz)。

$m = \frac{P}{g}$  和  $k = \frac{P}{\delta_{st}}$  代入式 (17-2)，得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (17-10)$$

式 (17-10) 表明，对上述振动系统，只要知道重力作用下的静变形，就可求得系统的固有频率。

(2) 振幅 (Amplitude) 和初位相。在式 (17-5) 中， $A$  表示物块偏离振动中心的最大距离，称为振幅，它反映自由振动的范围和强弱； $(\omega_n t + \theta)$  称为振动的相位 (Phase) (或相位角)，单位是弧度 (rad)，相位决定了物块在某瞬时  $t$  的位置，而  $\theta$  称为初相位，它决定了物块运动的起始位置。

例 17-1 求图 17-3 所示单摆的微幅振动周期。已知摆球质量为  $m$ ，摆绳长为  $l$ 。

解 单摆的静平衡位置为铅垂位置，用摆绳偏离垂线的夹角  $\varphi$  作为角坐标。摆球受到重力  $mg$  和绳拉力  $F$  的作用。取  $\varphi$  的增大方向为正向，依据动量矩定理，得

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin\varphi$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g \sin\varphi}{l} = 0$$

对于微幅振动的单摆， $\sin\varphi \approx \varphi$ ，上式可简化为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

与式 (17-3) 比较，可得单摆微幅振动的固有圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

周期为

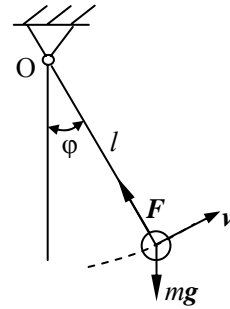


图 17-3

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

讨论

(1) 与质量弹簧系统相比较, 可知单摆的微幅振动也是一简谐运动, 其振动方程、振幅、初相位在形式上与式 (17-5), (17-6) 相似, 只是运动坐标用角坐标  $\varphi$  表示, 初始条件用  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\varphi' = \omega_0$  表示。

(2) 由周期表达式可知, 单摆作微幅振动时周期为常量。只要测出周期  $T$ , 就可算出当地的实际重力加速度值。读者若有兴趣, 可用单摆测定重力加速度。为了减小误差, 可先测出 100 个周期所用时间, 然后取其平均值。

**例 17-2** 滑轮重  $P$ , 重物  $M_1, M_2$  重为  $Q_1, Q_2$ 。弹簧的刚度系数为  $k$ , 如图 17-4 所示。设滑轮为均质圆盘, 略去弹簧与绳子的质量, 求重物垂直振动的周期。

解 以滑轮偏离其平衡位置的转角  $\varphi$  为确定系统位置的坐标。设滑轮半径为  $r$ 。当系统在任意位置  $\varphi$  时, 弹簧的变形量为

$$\delta = \delta_{st} + r\varphi$$

$\delta_{st}$  为系统在平衡位置时弹簧的静变形。

依据动量矩定理, 有

$$J_0\varphi'' = -k(\delta_{st} + r\varphi)r + Q_1r - Q_2r$$

式中  $J_0$  为系统对点  $O$  的转动惯量, 即

$$J_0 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2 + \frac{Q_1}{g}r^2 + \frac{Q_2}{g}r^2 = \left(\frac{P}{2} + Q_1 + Q_2\right)\frac{r^2}{g}$$

系统在平衡位置时弹性力对点  $O$  之矩与重物重力对点  $O$  之矩相互抵消, 即

$$-k\delta_{st}r + Q_1r - Q_2r = 0$$

因此有

$$\left(\frac{P}{2} + Q_1 + Q_2\right)\frac{r^2}{g}\varphi'' = -kr^2\varphi$$

即

$$\varphi'' + \frac{2gk}{P + 2Q_1 + 2Q_2}\varphi = 0$$

从而可得系统的固有圆频率为

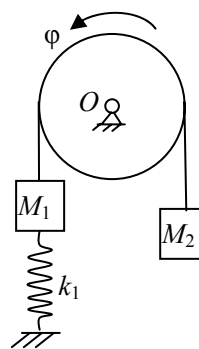


图 17-4

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2gk}{P + 2Q_1 + 2Q_2}}$$

重物垂直振动的周期（系统的振动周期）为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{P + 2Q_1 + 2Q_2}{2gk}}$$

### 3. 弹簧的并联与串联

(1) 弹簧并联。图 17-5 表示刚性系数为  $k_1, k_2$  的弹簧组成的两种并联系统。在物块重力作用下，每个弹簧产生的静变形相等，由物块的平衡条件可得

$$mg = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st}$$

将并联弹簧看成为一个弹簧，其刚度系数  $k_{eq} = mg/\delta_{st}$ ，称

为等效刚度系数 (Equivalent stiffness)。从而可得

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (17-11)$$

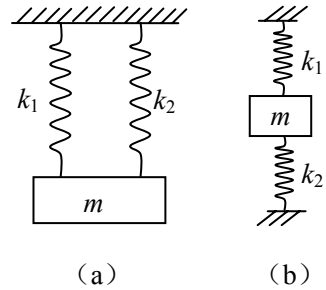


图 17-5

式 (17-11) 表明并联弹簧系统的等效刚度系数等于各弹簧刚度系数之和。这一结果说明弹簧并联后总的刚度系数增大了。该系统的固有圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

(2) 弹簧串联。图 17-6 表示两个弹簧串联，两个弹簧的刚度系数分别为  $k_1, k_2$ 。在物块重力作用下每个弹簧所受的拉力相同，因此每个弹簧的静变形为

$$\delta_{st_1} = \frac{mg}{k_1}, \quad \delta_{st_2} = \frac{mg}{k_2}$$

两个弹簧总的静变形为

$$\delta_{st} = \delta_{st_1} + \delta_{st_2} = mg \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

将串联弹簧看成为一个弹簧，其等效刚度系数为  $k_{eq}$ ，则有

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k_{eq}}$$

比较上面两式，得

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (17-12)$$

式 (17-12) 表明串联弹簧系统的等效刚度系数的倒数等于各弹簧刚度系数的倒数之和。

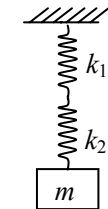


图 17-6

式 (17-2) 还可写成

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (17-13)$$

上述串联弹簧系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

### § 17-2 计算固有频率的能量法

对于图 17-1 所示无阻尼振动系统, 当系统作自由振动时, 物块的运动规律为

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta)$$

速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_n \cos(\omega_n t + \theta)$$

在瞬时  $t$ , 物块的动能为

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \theta)$$

选平衡位置为零势能位置, 系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} k [(x + \delta_{st})^2 - \delta_{st}^2] - mgx$$

因为  $k\delta_{st} = mg$ , 所以势能为

$$V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_n t + \theta)$$

当物块处于平衡位置 (振动中心) 时, 势能为零, 动能最大, 即

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$$

当物块处于距振动中心最远的位置时, 动能为零, 势能最大, 即

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

无阻尼自由振动系统是保守系统, 由机械能守恒定律有

$$T_{\max} = V_{\max}$$

对于质量弹簧系统, 可得固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

根据上述方法, 可求出其它类型机械振动系统的固有频率。

**例 17-3** 图 17-7 所示系统中, 圆柱体半径为  $r$ , 质量为  $m$ , 在水平面上滚而不滑;

弹簧刚度系数为  $k$ 。试求系统的固有圆频率。

**解** 以弹簧处于原长时圆柱圆心为坐标原点，以圆柱圆心偏离原点的距离  $x$  为系统的运动坐标。设系统作自由振动，坐标  $x$  的变化规律为

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{4} m x'^2 = \frac{3}{4} m \omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \theta)$$

式中  $J$  为圆柱对圆心的转动惯量。系统的最大动能为

$$T_{\max} = \frac{3}{4} m \omega_n^2 A^2$$

系统的势能为

$$V = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega_n t + \theta)$$

最大势能为

$$V_{\max} = \frac{k}{2} A^2$$

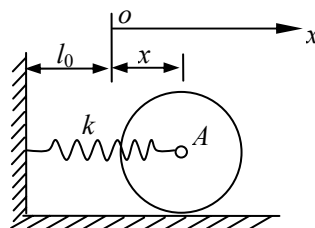


图 17-7

根据机械能守恒定律，有

$$T_{\max} = V_{\max}$$

即

$$\frac{3}{4} m \omega_n^2 A^2 = \frac{k}{2} A^2$$

得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

**例 17-4** 用能量法计算例 17-2 题。

**解** 以滑轮偏离其平衡位置的转角  $\varphi$  为系统的坐标。设系统作自由振动，振动规律为

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega_n t + \theta)$$

当系统在任意位置  $\varphi$  时，其动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_0 \varphi'^2 + \frac{1}{2} \times \frac{Q_1}{g} (\varphi' r)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{Q_2}{g} (\varphi' r)^2 \\ &= \frac{r^2}{2g} \left( \frac{1}{2} P + Q_1 + Q_2 \right) \varphi_m^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \theta) \end{aligned}$$

最大动能为

$$T_{\max} = \frac{r^2}{4g} (P + 2Q_1 + 2Q_2) \varphi_m^2 \omega_n^2$$

系统的势能为

$$V = \frac{k}{2} [(\delta_{st} + r\varphi)^2 - \delta_{st}^2] - Q_1 r\varphi + Q_2 r\varphi = \frac{k}{2} r^2 \varphi^2 = \frac{k}{2} r^2 \varphi_m^2 \sin^2(\omega_n t + \theta)$$

最大势能为

$$V_{\max} = \frac{k}{2} r^2 \varphi_m^2$$

由  
得

$$T_{\max} = v_{\max}$$

$$\frac{1}{4g} (P + 2Q_1 + 2Q_2) \omega_n^2 = \frac{k}{2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2gk}{P + 2Q_1 + 2Q_2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{P + 2Q_1 + 2Q_2}{2gk}}$$

### § 17.3 单自由度系统有阻尼自由振动

无阻尼自由振动，振幅保持不变，振动能够持续进行下去。但实际中的自由振动振幅随时间增加不断减小，直到振动停止。这是因为振动过程中，还存在某些影响振动的阻力。这个阻力称为阻尼。阻尼有多种形式，如粘性阻尼、干摩擦阻尼、结构变形产生的内阻尼等。这里只讨论粘性阻尼。

当振动速度不大时，阻力近似地与速度成正比，方向与速度相反。这样的阻尼（Damping）称为粘性阻尼（Viscous damping）。设振动质点的速度为  $v$ ，粘性阻尼的阻尼力可表示为

$$R = -Cv \quad (17-14)$$

其中比例常数  $C$  称为阻尼系数（Coefficient of damping），负号表示阻力与速度的方向相反。

在图 17-8 (a) 所示的质量弹簧系统中，用一阻尼器表示系统的阻尼。以物块为研究对象。取静平衡位置为原点，坐标轴  $x$  向下为正。物块在任意位置  $x$  处的受力如图 17-8

(b) 所示。物块的运动微分方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\delta_{st} + x) - C \frac{dx}{dt}$$

将  $\delta_{st} = mg/k$  代入上式，整理得

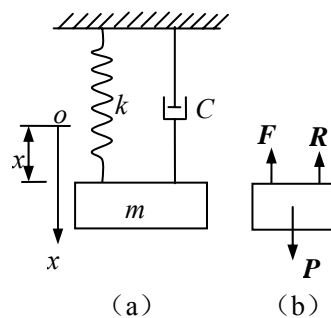


图 17-8



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

令 
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad n = \frac{C}{2m} \quad (17-15)$$

$n$  称为阻尼参变量，表示系统阻尼的大小。将  $\omega_n$  与  $n$  代入前式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad (17-16)$$

式 (17-16) 是有阻尼自由振动微分方程的标准形式，是二阶齐次常系数微分方程。对于不同的阻尼系数，方程的解有很大不同，下面分别进行讨论。

(1) 小阻尼情形。当  $n < \omega_n$ ，阻尼系数  $C < 2\sqrt{mk}$  时，阻尼较小，称为小阻尼情形。

这时式 (17-16) 的解为

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \theta) \quad (17-17)$$

或

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega_d t + \theta)$$

式中  $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - n^2}$ ， $A$  和  $\theta$  为积分常数，由运动条件确定。设  $t=0$  时， $x=x_0$ ， $v=v_0$ ，

代入式 (17-17) 及其导数中，可得

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega_n^2 - n^2}} \\ \tan \theta &= \frac{x_0 \sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{v_0 + nx_0} \end{aligned} \right\} \quad (17-18)$$

式 (17-17) 是小阻情形下的自由振动表达式，振幅随时间不断衰减，所以又称为衰减振动 (Damped Vibration)。其运动图线如图 17-9 所示。从图中可以看出振幅在曲线  $x = Ae^{-nt}$  与  $x = -Ae^{-nt}$  之间逐次递减。这种振动已不是周期振动，但仍然是围绕平衡位置的往复运动，仍然具有振动的特点。习惯上将  $Ae^{-nt}$  称为瞬时振幅，将  $\omega_d$  称为衰减振动的圆频率。令

$$\xi = \frac{n}{\omega_n} = \frac{C}{2\sqrt{mk}} \quad (17-19)$$

$\xi$  称为阻尼比 (Damping ratio)。衰减振动的圆频率  $\omega_d$  与周期  $T_d$  为

$$\left. \begin{aligned} \omega_d &= \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ T_d &= \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17-20)$$

式中  $\omega_n$  与  $T$  表示相应无阻尼自由振动系统的固有频率与周期。由式 (17-20) 可知, 在相同的质量及刚度系数条件下, 衰减振动的周期比无阻尼自由振动的周期长。但当阻尼很小时, 对周期的影响并不明显。

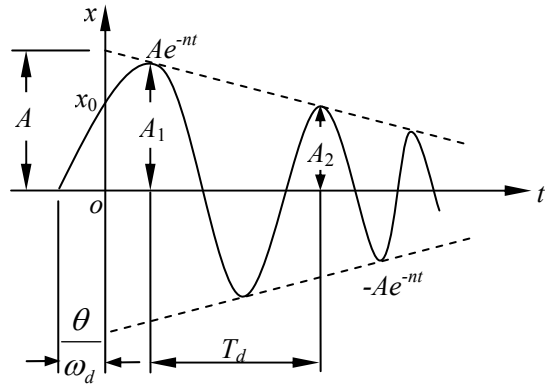


图 17-9

设某瞬  $t_i$ , 振幅为  $Ae^{-nt_i}$ , 经过一个周期  $T_d$  后, 下一个振幅为  $Ae^{-n(t_i+T_d)}$ 。这两个相邻振幅之比为

$$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-nt_i}}{Ae^{-n(t_i+T_d)}} = e^{nT_d} \quad (17-21)$$

$\eta$  称为振幅减缩率, 从式 (17-21) 可知任意两个相邻振幅之比为一常数, 所以衰减振动的振幅呈几何级数减小, 很快趋于零。

对式 (17-21) 的两端取自然对数, 得

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = nT_d \quad (17-22)$$

$\delta$  称为对数减缩率, 将式 (17-20) 代入式 (17-22), 得

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (17-23)$$

当阻尼很小时, 对数减缩率也可近似为

$$\delta = 2\pi\xi \quad (17-24)$$

(2) 临界阻尼和大阻尼情形。当  $n = \omega_n$  时, 称为临界阻尼情形。此时系统的阻尼系数用  $C_C$  表示,  $C_C$  称为临界阻尼系数。由式 (17-19) 得

$$C_C = 2\sqrt{mk} \quad (17-25)$$

此时, 式 (17-16) 的解为

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t)$$

其中  $C_1, C_2$  为积分常数, 由初始条件确定。

当  $n > \omega_n$  时, 称为大阻尼情形。此时式 (17-16) 的解为

$$x = -e^{-nt} \left( C_1 e^{\sqrt{n^2-\omega_n^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-\omega_n^2}t} \right)$$

$C_1, C_2$  为积分常数。由上述分析可知，在临界阻尼和大阻尼情形下，系统已不振动。

**例 17-5** 一有阻尼的弹簧质量系统如图 17-10 (a) 所示。测得  $x_2 = \frac{1}{9}x_1$ ，如图 17-10 (b) 所示。已知质量块  $m = 450 \text{ kg}$ ，振动周期为  $1 \text{ s}$ 。求此系统的弹性系数  $k$  及阻尼系数  $C$ 。

**解** 振幅的对数减缩率为

$$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln 9 = nT_d$$

将  $n = \frac{C}{2m}$  及  $T_d = 1 \text{ s}$  代入上式，可得  $C = 2m \ln 9 = 1978 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

由 
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 9$$

得 
$$\delta = 0.3302$$

由 
$$\delta = \frac{C}{2\sqrt{mk}}$$

得 
$$k = \frac{C^2}{4m\xi^2} = 19935 \text{ N/m}$$

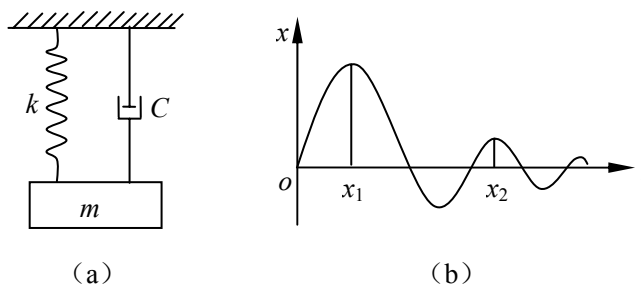


图 17-10

#### § 17.4 单自由度系统无阻尼受迫振动

实际中，振动系统常常会受到激振力的作用。由激振力所引起的振动称为受迫振动 (Forced Vibration)。例如，电机转子的偏心引起的振动，火车车箱行驶时在钢轨接缝处所产生的振动都是在激振力作用下引起的受迫振动。

简谐激振力是一种典型的周期变化的激振力，简谐激振力  $S$  随时间变化的关系为

$$S = H \sin \omega t \quad (17-26)$$

其中  $H$  称为激振力的力幅，即激振力的最大值； $\omega$  是激振力的圆频率，它们都是定值。

##### 1. 振动微分方程

图 17-11 (a) 所示的质量弹簧系统，物块质量为  $m$ 。取重物的静平衡位置为坐标原点  $O$ ， $x$  轴铅垂向下。当物体在离原点  $x$  处时，作用于物体上的力有重力  $P$ ，弹性力  $F$  和激振力  $S$ ，如图 17-11 (b) 所示。于是重物的运动微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - k(\delta_{st} + x) + S = -kx + H \sin \omega t$$

令

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2, \quad h = \frac{H}{m} \quad (17-27)$$

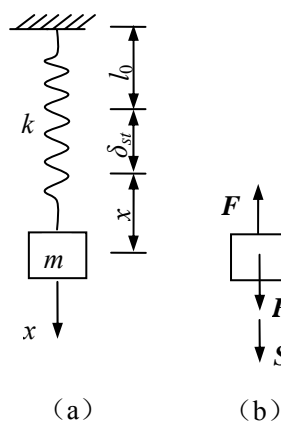


图 17-11

得 
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = h \sin \omega t \quad (17-28)$$

该式为无阻尼受迫振动微分方程的标准形式，是二阶常系数非齐次线性微分方程，其解由两部分组成，即

$$x = x_1 + x_2$$

其中  $x_1$  为式 (17-28) 的齐次通解

$$x_1 = A \sin(\omega_n t + \theta)$$

$x_2$  为式 (17-28) 的特解，设特解  $x_2$  为

$$x_2 = B \sin \omega t$$

式中  $B$  为待定常数，将  $x_2$  代入式 (17-28)，可得

$$B = \frac{h}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (17-29)$$

由此可得

$$x_2 = \frac{h}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (17-30)$$

式 (17-28) 的全解为

$$x = A \sin(\omega_n t + \theta) + \frac{h}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (17-31)$$

式 (17-31) 表明：无阻尼受迫振动是由两个谐振动合成的，第一部分是频率为固有频率的自由振动；第二部分是频率为激振力频率的振动，称为受迫振动。由于振动系统中总有阻尼存在，自由振动部分会很快地衰减下去，下面着重研究受迫振动。

## 2. 受迫振动的振幅

在受迫振动中最值得注意的是振幅的变化规律，受迫振动的振幅为

$$B = \frac{h}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

振幅的大小与运动初始条件无关，与振动系统的固有频率  $\omega_n$ 、激振力频率  $\omega$ 、激振力幅  $H$  有关。下面讨论振幅与激振力频率之间的关系。

(1)  $\omega \rightarrow 0$ ，此时激振力的周期趋于无穷大，激振力为一恒力，此时并不振动。在此恒力作用下的静变形为

$$B_0 = \frac{h}{\omega_n^2} = \frac{H}{k}$$

(2)  $0 < \omega < \omega_n$ ，振幅  $B$  随着激振力频率  $\omega$  的增加而增大。当  $\omega$  接近于  $\omega_n$  时，振幅  $B$  将趋于无穷大。

(3)  $\omega > \omega_n$ ，此时振幅  $B$  为负值，表示受迫振动  $x_2$  与激振力反相。但习惯上把振幅都取为正值，因此  $B$  取其绝对值。这时，随着激振力频率的增大，振幅减小，当  $\omega$  趋于  $\infty$

时，振幅  $B$  趋于零。

上述振幅  $B$  与激振力频率的关系如图 17-12 (a) 所示。该曲线称为振幅频率曲线，也称共振曲线。

为了使曲线更具有普遍意义，将纵轴取为  $\beta = \frac{B}{B_0}$ ，称为振幅比，振幅比表示由常力  $H$  的静力作用换成激振力  $H \sin \omega t$  的作用时，振动系统变形扩大的倍数。将横轴取为  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$ ，称为频率比。 $\beta$  和  $\lambda$  的关系如图 17-12 (b) 所示，该曲线称为幅频特性曲线。

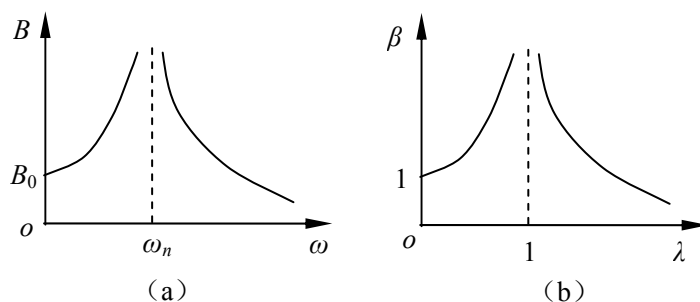


图 17-12

### 3. 共振 (Resonance) 现象

当  $\omega = \omega_n$  时，振幅  $B$  在理论上应趋向无穷大，这种现象称为共振。在此情形下，式 (17-30) 所表示的特解失去意义。此时微分方程式 (17-28) 的特解应为

$$x_2 = B t \cos \omega_n t$$

将此式代入式 (17-28)，得

$$B = -\frac{h}{2\omega_n}$$

故共振时受迫振动的运动规律为

$$x_2 = -\frac{h}{2\omega_n} t \cos \omega_n t \quad (17-32)$$

振幅为  $\frac{h}{2\omega_n} t$ 。共振时，随着时间的增加，振幅不

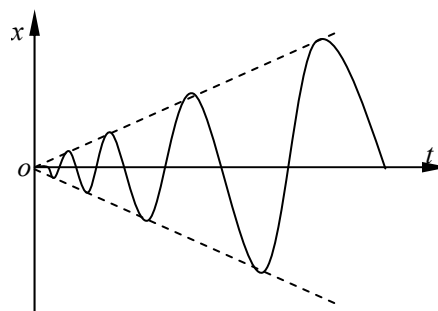


图 17-13

断加大，如图 17-13 所示。

实际上，由于系统存在有阻尼，共振时振幅不可能达到无限大。但一般来说共振时的振幅都是相当大的。如不预先加以防止，极易造成工程上的危害。

**例 17-6** 电机质量  $m = 800 \text{ kg}$ ，安装在弹性梁中部，如图 17-14 (a) 所示。电机转速  $n = 1450 \text{ r/min}$ ，由于转子偏心引起的激振力幅  $H = 600 \text{ N}$ ，梁的静变形  $\delta_{st} = 0.4 \text{ cm}$ 。不计梁重及阻尼。求受迫振动的振幅及共振时电机的临界转速。

**解** 图 17-14 (a) 所示的系统可简化为图 17-14 (b) 所示的模型，系统的刚度系数为

$$k = \frac{mg}{\delta_{st}}$$

由式 (17-2), 可求出系统的固有圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.4 \times 10^{-2}}} = 49.5 \text{ rad/s}$$

激振力圆频率为

$$\omega = \frac{n\pi}{30} = 151.8 \text{ rad/s}$$

单位质量的激振力幅为

$$h = \frac{H}{m} = \frac{600}{800} = 0.75 \text{ m/s}^2$$

所以受迫振动的振幅为

$$B = \frac{h}{|\omega_n^2 - \omega^2|} = \frac{0.75}{151.8^2 - 49.5^2} = 3.64 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0364 \text{ mm}$$

当激振力频率 (即电机转子的角速度) 等于系统的固有频率  $\omega_n$  时, 系统产生共振, 这时的转速称为临界转速。设临界转速以  $n_C$  表示, 则有

$$\frac{n_C \pi}{30} = \omega_n$$

$$n_C = \frac{30 \omega_n}{\pi} = 472.9 \text{ r/min}$$

### § 17-5 单自由度系统有阻尼受迫振动

有阻尼振动系统如图 17-15 所示, 设物块质量为  $m$ , 作用于物块上的力有重力  $P$  弹性恢复力  $F$ 、粘性阻尼力  $R$  和简谐激振力  $S$ 。若选平衡位置为坐标原点, 坐标轴铅直向下, 可建立质点的运动微分方程。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P + S - F - R$$

式中

$$S = H \sin \omega t, \quad F = k(\delta_{st} + x)$$

$$R = C v = C \frac{dx}{dt}$$

代入微分方程, 得

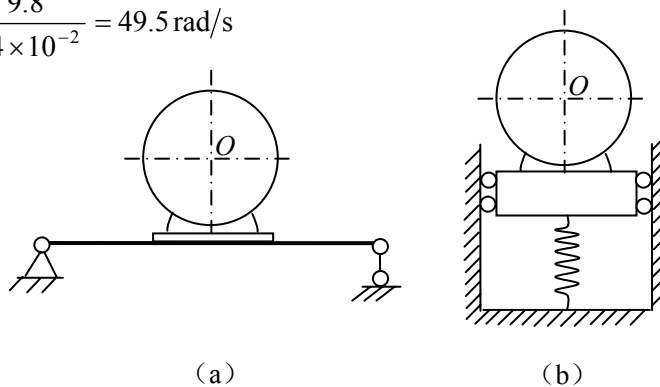


图 17-14

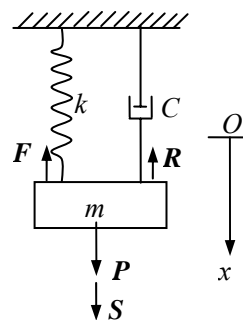


图 17-15

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = H \sin \omega t - kx - C \frac{dx}{dt}$$

将上式两端除以  $m$ ，并令

$$h = \frac{H}{m}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2n = \frac{C}{m}$$

得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = h \sin \omega t \quad (17-33)$$

上式是有阻尼受迫振动微分方程的标准形式，其解为

$$x = x_1 + x_2$$

$x_1$  为式 (17-33) 齐次部分的通解，在小阻尼情形下，有

$$x_1 = A e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \theta)$$

$x_2$  为式 (17-33) 的特解，设

$$x_2 = B \sin(\omega t - \varepsilon)$$

其中  $\varepsilon$  表示振动的相位落后于激振力的相位角。于是可得微分方程式 (17-33) 的全解为

$$x = A e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \theta) + B \sin(\omega t - \varepsilon) \quad (17-34)$$

从式 (17-34) 可知，有阻尼受迫振动由两部分组成：第一部分是阻尼的自由振动，因受阻尼的影响，其振幅将随时间的增加而衰减，经过一段时间后便会消失。第二部分是有阻尼的受迫振动，它是由于周期变化的激振力所引起的振动。在持续简谐激振力的作用下，受迫振动也是一个持续进行着的简谐运动，称为振动的稳定状态。在稳定状态下， $x_1=0$ ，因此有

$$x = x_2 = B \sin(\omega t - \varepsilon)$$

式中  $B$  为稳定状态下的振幅。将  $x_2$  代入式 (17-33)，可得

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \quad (17-35)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (17-36)$$

下面讨论  $H$ ， $\omega$  及阻尼对振幅  $B$  的影响：

(1) 激振力力幅  $H$  对振幅  $B$  的影响：

由  $h = \frac{H}{m}$  可知振幅  $B$  与激振力力幅成正比。

(2) 激振力圆频率  $\omega$  对振幅  $B$  的影响:

$$B = \frac{h/\omega_n^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_n}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

由于  $\frac{h}{\omega_n^2} = B_0$ , 频率比  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$ , 阻尼比  $\xi = \frac{n}{\omega_n}$ , 因而可得到振幅比  $\beta$  为

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} \quad (17-37)$$

以  $\beta$  为纵轴, 以  $\lambda$  为横轴, 对于每一个  $\xi$  值, 都可得到一条  $\beta - \lambda$  的关系曲线, 即幅频特性曲线。在图 17-16 中画出了不同  $\xi$  值的幅频特性曲线。

1) 当  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ , 即  $\omega \ll \omega_n$  时, 称为低频区。此时  $\beta = \frac{B}{B_0}$  趋近于 1, 表明缓慢变化的激振力的动力作用与其最大值的静力作用几乎相同。

2) 当  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ , 即  $\omega \gg \omega_n$  时, 称为高频区, 此时  $\beta = \frac{B}{B_0}$  趋近于零, 即振幅  $B$  趋近于零。

3) 当  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$  趋近于 1, 即  $\omega$  趋近于  $\omega_n$  时, 在小阻尼情况下幅频特性曲线出现一个峰值, 此时振幅显著地增大。

(3) 阻尼对振幅  $B$  的影响。由图 17-16 可以看出, 在低频区和高频区, 阻尼对振幅的影响十分微小, 这时可忽略系统的阻尼。当  $\omega$  趋近于  $\omega_n$  时, 即在共振区内, 阻尼对振幅的影响很大。在共振区内, 阻尼对受迫振动有显著的抑制作用。

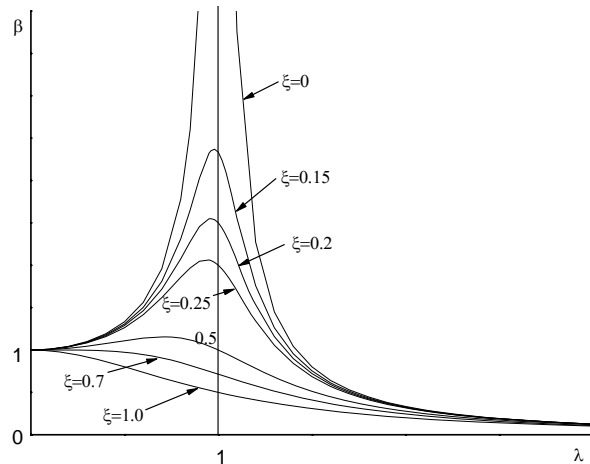


图 17-16