第二章　汇交力系

汇交力系是指：

作用在质点或刚体上的所有力的作用线的延长线汇交与同一点。

汇交力系分类：

（a）平面共点力系：作用在质点或刚体上所有力的作用线在同一平面。且作用在同一点上。

（b）空间共点力系：至少有三个力的作用线非共面。但所有力作用在同一点上。

（c）平面汇交力系：作用在质点或刚体上所有力的作用线在同一平面。但作用点不在同一点，而作用线的延长汇交于同一点。

（d）空间汇交力系：至少有三个力的作用线非共面。且作用点不在同一点，而作用线的延长线汇交于同一点。

本章主要分析汇交力系的合成和平衡。

合成：

将汇交力系情况下作用在质点或刚体上的力作为可沿其作用线自由移动的滑移矢量（将力矢量作为滑移矢量），利用矢量加法运算法则所得汇交点处和滑移矢量的过程称为汇交力系的合成。

汇交力系的合成所确定的和滑移矢量不是一般合力，因为滑移矢量没有确定的起始点，而作为合力的力，按力的三要素，应该具有确定的作用点。即力作为矢量，必须是具有确定起始点的特殊矢量。汇交力系中作为滑移矢量所有力的矢量和称为主矢（量）。虽然汇交力系一般不存在合力的概念，只有主矢（量）的概念。但对共

点力系，由于所有作用在质点或刚体上的力作用在同一点，由平行四边形法则，将作用在同一点的所有力每两力合成一个合力（通过平行四边形法则），最终可得到一个合力（即共点力系存在合力），且主矢（量）就等于合力。

合成的实质：

对于非共点的汇交力系，合成实质上是对刚体上作用所有力，应用力的可传递性和平行四边形法则得到的与原刚体上作用非共点汇交力系力学效应等效的用于力学分析研究的模型。而共点力系的合成实质上是变形体上所有力应用平行四边形法则得到的与原变形体上作用共点力系学效应等效的用于力学分析研究的模型。

汇交力系的平衡：

根据§1-1 中物体（刚体）相对于给定惯性系（体）静止或作均速直线运动的平衡（状态）的定义，实质上是对给定惯性参考系（体），物体上所受其它物体作用的力为零。或更确切地说对于给定的惯性参考系（体）中的物体（刚体），若无其它物体对其的作用，则该物体（刚体）处于平衡状态。

显然，物体（刚体）的平衡实质上就是牛顿第一定律（惯性定律）的自然结果。值得特别指出的是在实际工程问题（尤其是理论力学所分析研究的问题），所涉及的惯性参考系（体）就取为地球。在后中所说的平衡状态所对应的惯性参考系（体）都是指的地球，且习惯上不在每次提到平衡（状态）一词，都指明是相对地球惯用性参考系（体）。另外在静力学问题中所说的平衡状态通常是物体（刚体）相对地球惯性参考系（体）静止。

2-1　汇交力系合成的几何法（力多边形法则）

所谓**汇交力系的几何法是指：**利用几何的方法确定作用有汇交力系的刚体（或共点力系的变形体）的主矢（或共点力系的合力）的方法。

下面通过平面汇交力系的具体实例说明汇交力系几何法的基本过程和方法。

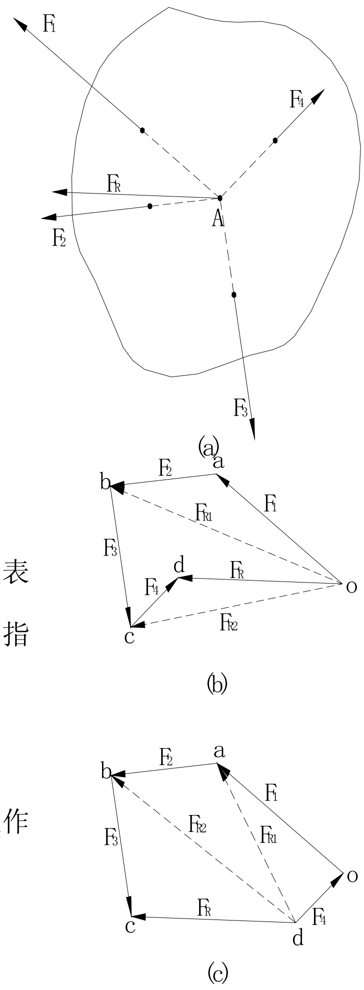


图 2-1

如图 2-1 所示，作用有 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 汇交力系的刚体。首先作 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 的作用线的延长线，确定汇交力系的汇交点 A。如图 2-1（a）所示。然后在平面上任意选取一方便几何作图的点 O。将作用在刚体上的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 依次按自由矢量平行移动至首尾相接（$\boldsymbol{F}_1$ 的起点在 O 点）。得到平面折线 *oabcd*。如图 2-1（b）所示。对 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 应用平行四边形法则得矢量 $\boldsymbol{F}_{R1}$（$\boldsymbol{F}_{R1}$ 代表了 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 两个作用在刚体上的力的主矢量的大小和指向）。作为矢量的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_{R1}$ 满足：

$$\boldsymbol{F}_{R1} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

同理对矢量 $\boldsymbol{F}_{R1}$、$\boldsymbol{F}_3$ 应用平行四边形法则得 $\boldsymbol{F}_{R2}$。且作为矢量的 $\boldsymbol{F}_{R1} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_{R2}$ 满足：

$$\boldsymbol{F}_{R2} = \boldsymbol{F}_{R1} + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$$

对矢量 $\boldsymbol{F}_{R2}$、$\boldsymbol{F}_4$ 应用平行四边形法则得 $\boldsymbol{F}_R$。且作为矢量的 $\boldsymbol{F}_{R2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_R$ 满足：

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_{R2} + \boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$$

显然当刚体上作用有 n 个汇交力 $\boldsymbol{F}_1$，…，$\boldsymbol{F}_n$ 时有

$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{F} \qquad (2\text{-}1)$$

最后将起点在 O 点的矢量 $\boldsymbol{F}_R$ 平行移至刚体的汇交点 A，得到作用在刚体上汇交力系的汇交点上的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 的主矢。如图 2-1（a）所示。

图 2-1（b）中多边形 *oabcdo* 称为力多边形。主矢（量）是力多边形的封闭边。这种确定汇交力系的主矢（量）的几何法也称为力的多边形法则。通过对力的多边形的几何分析（或直接测量）可以确定主矢（量）的大小和方位。

在确定图 2-1（b）中力的多边形时，是对 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 依次按自由矢量平行移动至首尾相接得到的。对于用几何法确定汇交力系的主矢（量），按不同的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 次序，依次按自由矢量平行至移动首尾相接，所得的力多边形一般是不相同的。如图 2-1（c）是按 $\boldsymbol{F}_4$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 次序，按自由矢量平行移动至首尾相接所得的力多边形。显然 2-1（b）、图 2-1（c）两图的力多边形不相同。但尽管所得力的多边形不相同，其封闭边的主矢（量）是（作为自由矢量）完全相同的。这一性质实际上是（2-1）式关于矢量加法的交换律。

对空间交汇力系，仍可接上述确定力的多边形，且主矢仍由（2-1）式确定。所不同的是空间汇交力系几何法所确定的力多边形是空间折线多边形。由于空间折线多边形的几何分析远比平面折线多边形困难，因此对空间汇交力系通常不使用几何法确定其主矢（量）。

2-2　汇交力系平衡的几何法

设刚体上作用 *n* 个作用线汇交与同一点的 $\boldsymbol{F}_1$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 汇交力系。

则该刚体平衡的充分必要条件为主矢（量）是零矢量。即

$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

或者刚体上作用 n 个作用线汇交于同一点的 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 汇交力系。则该刚体平衡的几何充分必要条件为 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 构成的力多边形为封闭的力多边形。

证：

若刚体受 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 汇交力系作用。则由力的合成法，确定在刚体上作用力学效应等效的 $\boldsymbol{F}_R$，而刚体的其它作用点上均未受到其它物体的作用。即刚体受 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用时可以看作一个质点（刚体的大小、形状都不会影响的 $\boldsymbol{F}_R$ 作用点，$\boldsymbol{F}_R$ 的作用点仅由 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 的作用线确定。因此可以将刚体看作是一质点。应当注意的是只对 $\boldsymbol{F}_R$ 的作用点这一性质时，刚体可以视为一个质点）。由牛顿第一定律（惯性定律），质点当且仅当作用在其上的力为零（严格说无其它物体的作用时）处于平衡状态。即

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = 0$$

刚体处于平衡状态。

刚体处于平衡状态时

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = 0$$

在应用（2-2）式时应得到注意：

1．刚体上作用的 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 为汇交力系时（2-2）式成立。

2．变形体上作用的 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$ 为共点力系时（2-2）式成立。

3．对其它情况（2-2）式不是平衡的充分必要条件。

4．由（2-2）式可知对刚体上作用的汇交力系和变形体上作用的共点力系，其力的多边形为封闭多边形。

5．作用在同一刚体上的汇交力系和作用在同一变形体上的共点力系时（2-2）式成立。

例 2-1　图 2-2 所示托架。试求 AB、AC 刚性杆上所受的力；B、C 固定铰座处的约束反力。

解：AB、AC 均为二力构件（二力杆）；B、C 为固定铰支座；A 为中间铰连接。托架、AB 杆、AC 杆处于平衡状态。由中间铰（将圆柱形销钉视为一个质点）的性质，将中间铰的视为质点的圆柱形销钉与 AB 杆看作同一刚体。如图 2-2（c）所示，由几何法可确定

$\left|\boldsymbol{F}'_{ACA}\right| = F'_{ACA} = 20\text{kN}$ 。

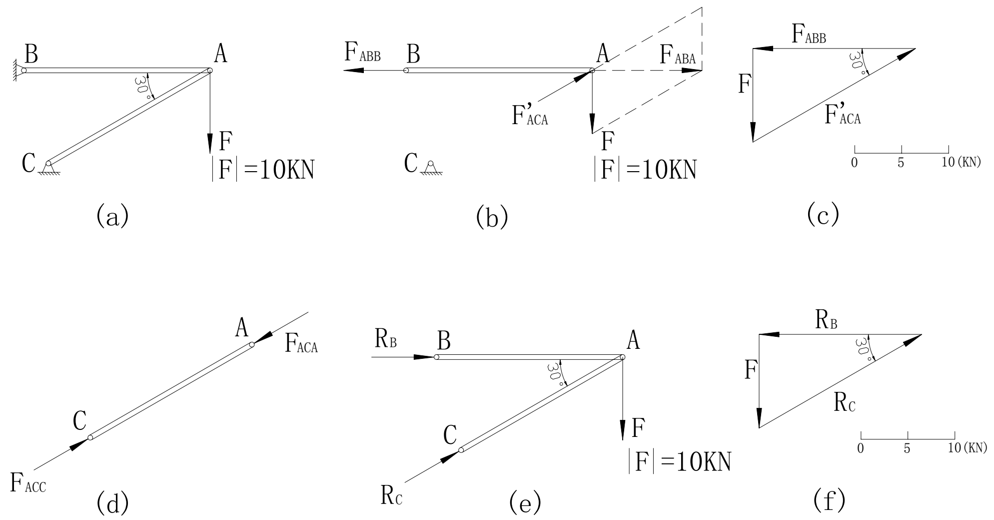


图 2-2

在确定了 $\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 后，对 AB 杆 A 点的 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 利用平行四边形法则得到作用在 AB 杆 A 点的合力（共点力系 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 存在合力）如图 2-2（b）所示。

$$\boldsymbol{F}_{ABA} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}'_{ACA}$$

最后得 AB 杆上的受力为：

A 点：$\boldsymbol{F}_{ABA}$； $\left|\boldsymbol{F}_{ABA}\right| = 17.3\text{kN}$； 方向如图所示。

B 点：$\boldsymbol{F}_{ABB}$；　$\left|\boldsymbol{F}_{ABB}\right| = 17.3\text{kN}$；　$\boldsymbol{F}_{ABB} = -\boldsymbol{F}_{ABA}$。

对 AC 杆，在 A 点的 $\boldsymbol{F}_{ACA}$ 与 AB 杆的 $\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 为作用力和反作用力。因此

$$\boldsymbol{F}_{ACA} = -\boldsymbol{F}'_{ACA}$$

$\boldsymbol{F}_{ACC}$ 为固定铰支座 C 的约束反力(固定铰支座在 C 点对 AC 杆作用力的抽象表示)。由于 AC 杆只在 A、C 两点受力，为二力构件。有二力构件（二力杆）的性质有

$$\boldsymbol{F}_{ACC} = -\boldsymbol{F}_{ACA} = \boldsymbol{F}'_{ACA}$$

最后得 AC 杆上的受力为：

A 点：$\boldsymbol{F}_{ACA}$；　$\left|\boldsymbol{F}_{ACA}\right| = 20\text{kN}$；　方向如图所示。

B 点：$\boldsymbol{F}_{ACC}$；　$\left|\boldsymbol{F}_{ACC}\right| = 20\text{kN}$；　$\boldsymbol{F}_{ACC} = -\boldsymbol{F}_{ACA}$。

为确定 C、B 处的约束反力。首先解除约束代之以约束反力。画出主动力的受力图如图 2-2（e）所示。$\boldsymbol{R}_B$、$\boldsymbol{R}_C$、$\boldsymbol{F}$ 构成汇交力系。由中间铰连接的 AB、AC 杆共同构成的托架处与平衡状态。由平衡几何条件刚体（当然也可将中间铰视为质点的圆柱形销钉与 AC 杆看作同一刚体)，将作用在 A 点的集中力（点接触）视为作用在 AB 杆上的 A 点（当然也可将作用在 A 点的集中力视为作用在 AC 杆的 A 点)。其 AB、AC 杆的受力如图 2-2（b)、图 2-2（d）所示。由于 AB、AC 杆处于平衡状态。对 AB 杆 $\boldsymbol{F}_{ABB}$、$\boldsymbol{F} = 10\,\text{kN}$（向下)、$\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 为作用在 AB 杆上 A、B 两点的力，由 AB 杆为二力构件（二力杆）的特点可知 $\boldsymbol{F}_{ABB}$ 的作用线在 A、B 两点的连线上。同时 $\boldsymbol{F}_{ABB}$ 又是固定铰支座在 B 点的约束反力（固定铰支座在 B 点时 AB 杆作用的抽象表示)。$\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 是 AC 杆对 AB 杆在 A 点约束反力，且 $\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 与 $\boldsymbol{F}_{ACA}$ 为作用力和反作用力。即 $\boldsymbol{F}'_{ACA} = \boldsymbol{F}_{ACA}$。$\boldsymbol{F}$ 为主动力。$\boldsymbol{F}_{ABA}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'_{ACA}$ 构成作用在 AB 杆上的汇

交力系，且是平行的汇交力小。由汇交力系的平衡几何条件中，作$\boldsymbol{F}_{ABB}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'_{ACA}$的力多边形，如图 2-2（c）所示。由直角三角形可解得：

$$\left|\boldsymbol{F}'_{ACA}\right| = \boldsymbol{F}_{ACA} = \sqrt{3}F = 17.3\mathrm{kN}$$

$$\left|\boldsymbol{F}'_{ABB}\right| = \boldsymbol{F}_{ABB} = 2F = 20\mathrm{kN}$$

也可直接由图中按给定比例量得：

$$\left|\boldsymbol{F}'_{ACA}\right| = \boldsymbol{F}_{ACA} = 17.4\mathrm{kN}$$

得力多边形如图 2-2（f）所示。对图 2-2（f）所示三角形求解得约束反力为：

B 点：$\boldsymbol{R}_B$；　$\left|\boldsymbol{R}_B\right| = 17.3\mathrm{kN}$；　方向如图所示。

C 点：$\boldsymbol{R}_C$；　$\left|\boldsymbol{R}_C\right| = 20\mathrm{kN}$；方向如图所示。

2-3　汇交力系合成与平衡的解析法

力的合成与平衡（不仅限于汇交力系）解析法基于矢量的线性表示的坐标及矢量的投影。为此首先给出坐标与投影两个概念。

矢量的坐标表示：

对 *n* 维矢量空间，若给定的 *n* 个矢量之间

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \boldsymbol{0} \qquad (2\text{-}3)$$

只有当$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$时成立，则$\boldsymbol{a}_1$、…、$\boldsymbol{a}_n$线性无关。而任意 *n* 维矢量空间的矢量$\boldsymbol{a}$都有

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n$$

式中，α_1、…、α_n 不全为零。则

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n \tag{2-4}$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 的一个 $\boldsymbol{a}_1$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 线性表示。$\boldsymbol{a}_1$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 称为 n 维矢量空间中的一组基底。而 n 元组（α_1、…、α_n）称 $\boldsymbol{a}$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 上的一个坐标表示。或称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标。

对于平面情况（二维矢量空间，$n = 2$）。如图 2-3。取任意二个非共线矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$。由矢量与数量的乘积性质

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

显然由于 $\boldsymbol{a}_1 \neq 0$，$\boldsymbol{a}_2 \neq 0$。上式只有当 $\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = 0$ 时才成立。因此 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 可以作为平面矢量的一组基底。《矢量与数量的乘法表示保持矢量的方向不变，矢量的模为原矢量模的数量乘积所得的新矢量》。任意矢量 $\boldsymbol{b}$ 按平行四边形矢量加法运算法则《这里并未用平行四边形法则一词，因为在理论力学中，平行四边形法则特指静力学中的力的加法法则。为了避免力的加法法则，对矢量的加法法则称为平行四边形矢量加法运算法则》。有：

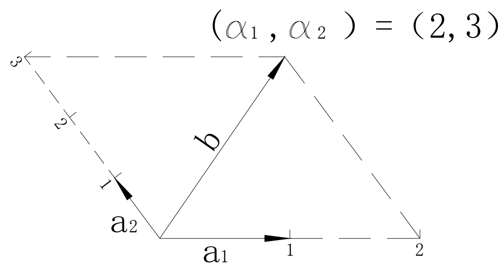


图 2-3

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$$

式中，$\alpha_1 = 2$，$\alpha_2 = 3$ 称为矢量 $\boldsymbol{b}$ 在平面矢量空间的（一组）基底 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 上的线性表示系数。或称为 $\boldsymbol{b}$（在基底 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 上的）坐标。也用

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 3)$$

的二元数组表示。

对于空间情况（三维矢量空间，$n = 3$）。如图 2-4。取任意非共面三矢量$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$。由矢量与数量的乘积性质

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = 0$$

显然由于$\boldsymbol{a}_1 \neq 0$、$\boldsymbol{a}_2 \neq 0$、$\boldsymbol{a}_3 \neq 0$。上式只有当$\alpha_1 = 0$、$\alpha_2 = 0$、$\alpha_3 = 0$时才成立。因此$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$可以作为矢量空间的一组基底。任意矢量$\boldsymbol{b}$接平行四边形矢量加法运算法则（在空间的几何表示中为平行六面体）有：

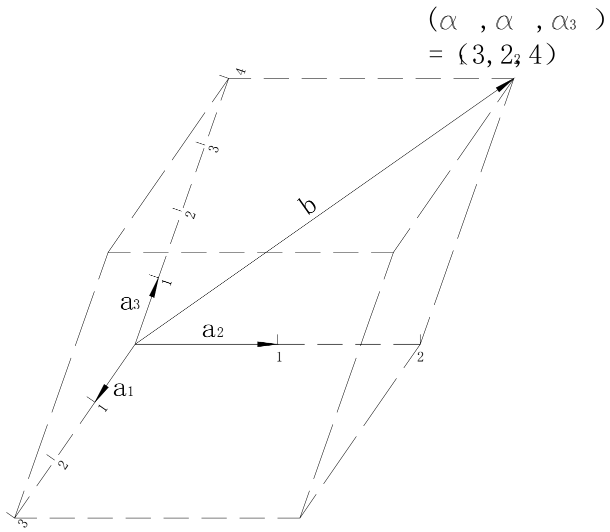


图 2-4

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$$

式中，$\alpha_1 = 3$、$\alpha_2 = 2$、$\alpha_3 = 4$称为矢量$\boldsymbol{b}$在矢量空间的（一组）基底$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$上的线性表示系数。或称为（在基底$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$上的）坐标。也用

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3,\ 2, 4)$$

的三元数组表示。

应当注意的是在任意矢量用基底表示的定义中，并未要求各基底矢量具有相同的长度，也未要求基底矢量必须具有单位长度。对平面或空间的情况，若限制

基底矢量为单位长度矢量，且基底矢量之间两两相互正交，即

平面情况：

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1; \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

空间情况：

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1; \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

则，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 构成的平面矢量空间的基底；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成的空间矢量空间的基底。且这样的基底称为标准正交基底；若基底矢量的起始点都在 O 点，则 O 点与基底共同构成标准正交坐标系（笛卡尔坐标系）。记为：

平面情况：$\{0;\ \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}\}$

空间情况：$\{0;\ \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}\}$

矢量的投影：

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 上投影定义为

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} / |\boldsymbol{b}| \qquad (2\text{-}5)$$

对于给定的标准正交坐标系$\{0;\ \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}\}$。按（2-5）式对任意矢量有（按平行四边形矢量加法运算法则）

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_a$$

（如图 2-5 所示，$\boldsymbol{r}_a$、$\boldsymbol{r}_b$ 为矢量 $\boldsymbol{u}$ 在$\{0;\ \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}\}$中起始点和未端点对应的起点在 O 点的矢量。起点在$\{0;\ \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}\}$的 O 点的矢量称为位置矢量。因此 $\boldsymbol{r}_a$、$\boldsymbol{r}_b$ 又称为矢量 $\boldsymbol{u}$ 的起始点和未端点对应的位置矢量）。

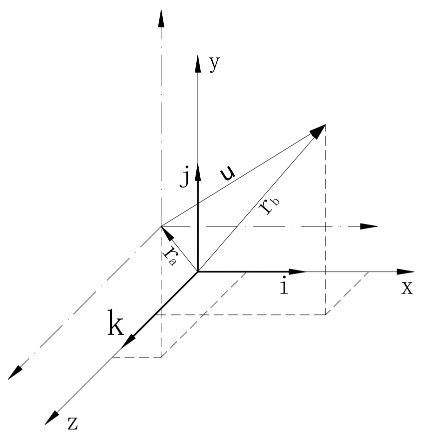


图 2-5

矢量 $\boldsymbol{u}$ 在三个坐标 xyz 轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影分别为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{r_b}\cdot\boldsymbol{i} - \boldsymbol{r_a}\cdot\boldsymbol{i} = r_{bx} - r_{ax} \\ \boldsymbol{u}_y = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r_b}\cdot\boldsymbol{j} - \boldsymbol{r_a}\cdot\boldsymbol{j} = r_{by} - r_{ay} \\ \boldsymbol{u}_z = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r_b}\cdot\boldsymbol{k} - \boldsymbol{r_a}\cdot\boldsymbol{k} = r_{bz} - r_{az} \end{cases} \qquad (2\text{-}6)$$

该式由投影的定义给出了矢量在给定坐标系（标准正交坐标系）{ 0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ }沿坐标单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的投影与矢量起始点和未端位置矢量 $\boldsymbol{r}_a$ 、$\boldsymbol{r}_b$ 的坐标间关系。或者说矢量在坐标系的坐标投影等于矢量在坐标系未端点位置矢量与起始点位置矢量的坐标差。

矢量投影的表示（在{ 0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ }中）

（a）坐标差表示

$$\boldsymbol{r}_a = r_{ax}\boldsymbol{i} + r_{ay}\boldsymbol{j} + r_{az}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_b = r_{bx}\boldsymbol{i} + r_{by}\boldsymbol{j} + r_{bz}\boldsymbol{k}$$

由（2-6）式

$$\begin{cases} u_x = r_{bx} - r_{ax} \\ u_y = r_{by} - r_{ay} \\ u_z = r_{bz} - r_{az} \end{cases} \qquad (2\text{-}7)$$

（b）直接投影表示（如图 2-6（a））

$$\begin{cases} u_x = |\boldsymbol{u}|\cos\alpha = u\cos\alpha \\ u_y = |\boldsymbol{u}|\cos\beta = u\cos\beta \\ u_z = |\boldsymbol{u}|\cos\gamma = u\cos\gamma \end{cases} \qquad (2\text{-}8)$$

（c）二次投影表示（如图（b））

$$\begin{cases} u_x = |\boldsymbol{u}|\cos\theta\cos\varphi = u\cos\theta\cos\varphi \\ u_y = |\boldsymbol{u}|\cos\theta\sin\varphi = u\cos\theta\sin\varphi \\ u_z = |\boldsymbol{u}|\sin\theta = u\sin\theta \end{cases} \qquad (2\text{-}9)$$

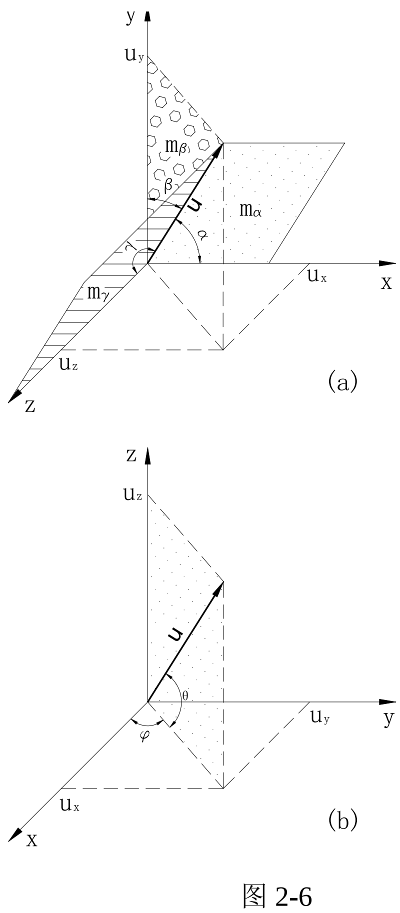


图 2-6

汇交力系的合成 ：

设刚体上作用汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$.。在刚体上 n 个力汇交点处建立标准正交坐标系{ 0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ }。将 $\boldsymbol{F}_1$、⋯、$\boldsymbol{F}_n$.作为矢量，可表示为

$$\boldsymbol{F}_1 = F_{1x}\boldsymbol{i} + F_{1y}\boldsymbol{j} + F_{1z}\boldsymbol{k}$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\boldsymbol{F}_n = F_{nx}\boldsymbol{i} + F_{ny}\boldsymbol{j} + F_{nz}\boldsymbol{k}$$

由（2-1）式可得汇交力系的主矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_R &= (F_{1x} + \cdots + F_{nx})\,\boldsymbol{i} + (F_{1y} + \cdots + F_{ny})\boldsymbol{j} + (F_{1z} + \cdots + F_{nz})\boldsymbol{k} \\ &= F_{Rx}\boldsymbol{i} + F_{Ry}\boldsymbol{j} + F_{Rz}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2-10}$$

式中，F_{ix}、F_{iy}、F_{ik}（i = 1，⋯，n）为 $\boldsymbol{F_i}$（i = 1，⋯，n）在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 方向的投影。或者称为 $\boldsymbol{F_i}$（i = 1，⋯，n）在 x、y、z 坐标轴上的投影。而 $F_{ix}\boldsymbol{i}$ 、$F_{iy}\boldsymbol{j}$ 、$F_{iz}\boldsymbol{k}$（i = 1，⋯，n）称为 $\boldsymbol{F}_i$ （i = 1，⋯，n）在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的分矢量。《这里要提出的是关于力的投影表示中经常用到“力的分量”的提法。对 $\boldsymbol{F_i}$ = $F_{ix}\boldsymbol{i} + F_{iy}\boldsymbol{j} + F_{iz}\boldsymbol{k}$ 的{0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系投影表示中分量矢量 $F_{ix}\boldsymbol{i}$ 、$F_{iy}\boldsymbol{j}$ 、$F_{iz}\boldsymbol{k}$ 的大小，即 $\left|F_{ix}\boldsymbol{i}\right|$、$\left|F_{iy}\boldsymbol{j}\right|$、$\left|F_{iz}\boldsymbol{k}\right|$ 称为 $\boldsymbol{F_i}$ 的分量》。

由（2-10）式，对主矢量 $\boldsymbol{F}_R$ 有

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{F}_R\right| &= \sqrt{\boldsymbol{F}_R \cdot \boldsymbol{F}_R} \\ &= \sqrt{\left(F_{Rx}\right)^2 + \left(F_{Ry}\right)^2 + \left(F_{Rz}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(F_{1x} + \cdots + F_{nx}\right)^2 + \left(F_{1y} + \cdots + F_{ny}\right)^2 + \left(F_{1z} + \cdots + F_{nz}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{i}\right) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{F_{1x} + \cdots + F_{nx}}{F_R}$$

$$\cos(\boldsymbol{F_R},\ \boldsymbol{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{F_{1y} + \cdots + F_{ny}}{F_R} \tag{2-11}$$

$$\cos(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{k}) = \frac{F_{Rz}}{F_R} = \frac{F_{1z} + \cdots + F_{nz}}{F_R}$$

例 2-2：如图 2-7 所示。试求汇交力系的主矢。并确定主矢的方向、将结果画在图上。

（ $|F_1| = 20\text{kN}$ ， $|F_2| = 30\text{kN}$ ， $|F_3| = 10\text{kN}$ ， $|F_4| = 25\text{N}$ ）。

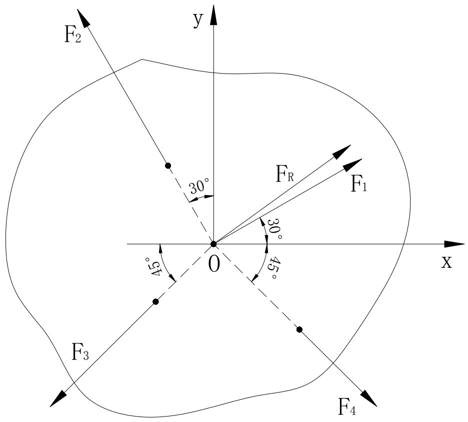


图 2-7

解：

（a)在汇交点处建立（平面标准正交）坐标系{0；***i***、***j***、***k***}。

（b） $\boldsymbol{F}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20\boldsymbol{i} + \frac{1}{2} \times 20\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{1}{2} \times 30\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30\boldsymbol{j}$ $\mathrm{F}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 10\mathrm{i} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \times 10\right)\mathrm{j}$

$\boldsymbol{F}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 25\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \times 25\right)\boldsymbol{j}$

（c） $\boldsymbol{F}_{Rx} = 10\sqrt{3} - 15 - 5\sqrt{2} + 12.5\sqrt{2} = 12.9271$（kN）

$\boldsymbol{F}_{Ry} = 10 + 15\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 12.5\sqrt{2} = 11.2320$（kN）

$\boldsymbol{F}_R = \sqrt{12.9271^2 + 11.2320^2} = 17.1251$（kN） （d） $\cos\left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{i}\right) = \dfrac{12.9271}{17.1251} = 0.7548$

$$\cos\left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{j}\right) = \frac{11.2320}{17.1251} = 0.6559$$

$$\left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{i}\right) = 40.992^\circ \;；\; \left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{j}\right) = 49.008^\circ$$

（e） $\boldsymbol{F}_R = 12.9271\boldsymbol{i} + 11.2320\boldsymbol{j}$ （kN）

$$\left(\boldsymbol{F_R}, \boldsymbol{i}\right) = 40.992^\circ$$

（f）见图 2-7。

汇交力系解析法平衡条件

设刚体上作用 $\boldsymbol{F}_1$，…，$\boldsymbol{F_n}$ 汇交力系。则由（2-2）式汇交力系的平衡充分必要条件

$$\boldsymbol{F_R} = 0$$

及（2-10）式和汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$，…，$\boldsymbol{F_n}$ 作用刚体上，刚体在{0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系下的平衡充分必要条件的解析式表达式

平面情况：

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + \cdots + F_{nx} = 0 \\ F_{Ry} &= F_{1y} + \cdots + F_{ny} = 0 \end{aligned} \qquad （2\text{-}12）$$

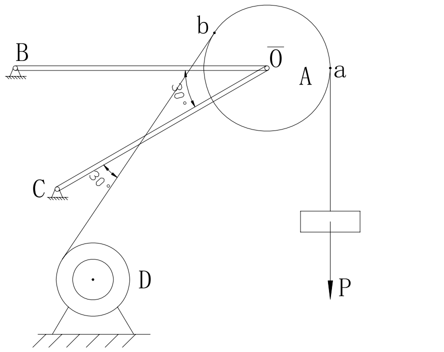
空间情况：

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + \cdots + F_{nx} = 0 \\ F_{Ry} &= F_{1y} + \cdots + F_{ny} = 0 \\ F_{Rz} &= F_{1z} + \cdots + F_{nz} = 0 \end{aligned} \qquad （2\text{-}13）$$

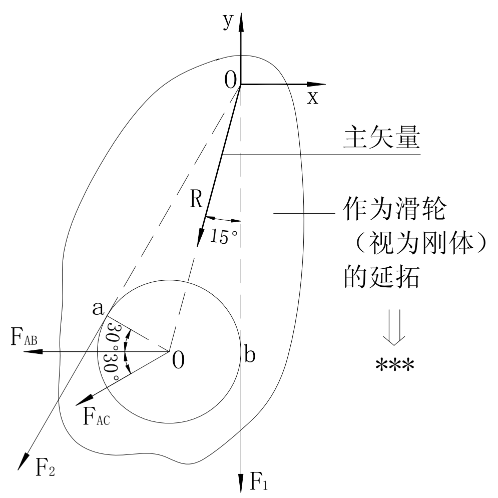
即：作用在刚体上的 $\boldsymbol{F}_1$，…，$\boldsymbol{F_n}$ 的平衡充分必要条件是，在任意给定的（标准正交）坐标系{0；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}中，主矢量在三个坐标轴上的投影之和等于零。

例 2-3　如图 2-8 所示简易起重设备，重 P = 20kN 的重物吊在钢丝绳一端，另一端绕过定滑轮 A 接在绞车 D 上。A、B、C 处分别为固定铰支座和中间铰连接。不计滑轮和各杆重量。试求重物匀速提升时，杆 AB、AC 作用于滑轮上的力。

解：



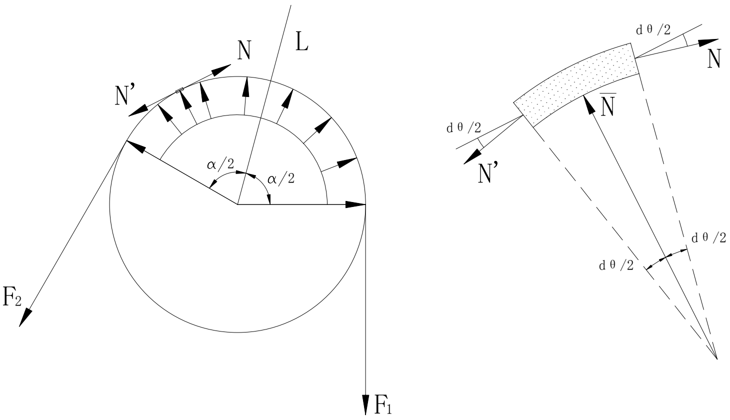
(a)



(b)

AB、AC 杆为二力构件（二力杆）。因此 AB、AC 杆对滑轮的作用力的作用线已知，而大小、指向未知。对滑轮的作用力还有柔索的拉力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$。

以滑轮为分析研究对象。如图 2-8（b）所示。首先由受力图可知，作用在滑轮上的 $\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{AC}$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 不构成汇交力系。但滑轮只在 $\overline{o}$ 、a、b 三受力的作用。而 $\overline{o}$ 点作用的 $\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{AC}$、可由平行四边形法则得到一个合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{AC}$。由三力汇交平衡定理可知，$\boldsymbol{F}$ 的作用线必通过 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用线的延长线交点 $\boldsymbol{o}$。《这里应当特别值得注意的是 $\boldsymbol{o}$ 点并未在滑轮上。但将滑轮视为刚体后，滑轮只是与滑轮视为刚体的刚体中的一部分。即任何刚体是充满整个空间的。而被理想化为刚体的客观实体，实际上只是被指定了形状和大小的整个刚体的一部。或者说，任何受力图中的刚体可根据需要被延拓》。将作用在 $\boldsymbol{o}$ 点的合力 $\boldsymbol{F}$ =



(c)

图 2-8

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{AC}}$，$a$ 点的 $\boldsymbol{F}_1$，b 点的 $\boldsymbol{F}_2$ 作用力在延拓后的刚体上，各沿其作用线滑移到汇交点 o。

其次对柔索两端的作用力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 进行进一步的分析。若不计柔索与滑轮在接触面上的摩擦，则在柔索和滑轮接触的每一点处的约束都是光滑（点）接触约束。图 2-8（c）给出了任意给定的α角对应的柔索滑轮光滑（点）接触的每一点的滑轮对柔索的约束反力。若不计柔索质量时，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}'$在半径方向的投影等于$\left|\boldsymbol{N}\right|$；$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}'$在切线方向的投影之和为零$\Rightarrow\left|\boldsymbol{N}\right|=\left|\boldsymbol{N}'\right|$。若考虑柔索质量时。当柔索上每一点速度大小不变（随时间不变）。即通说的柔索均速（但实际上柔索上的速度在各点的方向不完全相同，且α角对应的柔索上同一点的速度在不同的时刻方向也不同，因此严格讲，对柔索不能用均速的概念。因此这种情况下的柔索均速运动只是一种习惯用法）。此时$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}'$在半径方向的投影不等于$\left|\boldsymbol{N}\right|$（还存在法向加速度的影响），但$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}'$在切线方向的代数和仍为零$\Rightarrow\left|\boldsymbol{N}\right|=\left|\boldsymbol{N}'\right|$。当柔索上每一点速大小变化时，$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{N}'$在切线方向上的投影代数和不在为零$\Rightarrow\left|\boldsymbol{N}\right|\neq\left|\boldsymbol{N}'\right|$。在本题中每一点都有$\left|\boldsymbol{N}\right|=\left|\boldsymbol{N}'\right|$，对每一点的相邻点应用作用与反作用定律，最终有

$\left|\boldsymbol{F_1}\right| = \left|\boldsymbol{F_2}\right|$。

在 o 点建立坐标系 xoy，如图 2-8（b）所示。由（2-12）式得：

$\sum X = 0$：$-R\sin 15^{\circ} - F\cos 60^{\circ} = 0$

$\sum Y = 0$：$-R\cos 15^{\circ} - F - F\cos 30^{\circ} = 0$

因为 $R\cos 15^{\circ} = F_{AC}\cos 60^{\circ}$

$R\sin 15^{\circ} = F_{AB} + F_{AC}\cos 30^{\circ}$

所以 $$\begin{cases} -F_{AB} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_{AC} - 10 = 0 \\ -\dfrac{1}{2}F_{AC} - 20\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$F_{AC} = -74.641\,\text{kN}$；　$F_{AB} = 54.641\,\text{kN}$；　$R = -38.637\,\text{kN}$