第二篇　运动学

运动学研究物体运动的与运动产生原因无关的几何属性。对刚体而言，运动学是在给定的惯性参考系中，研究刚体相对惯性参考的空间位置变化科学。

第六章　点的运动

本章对质点（一种特殊的刚体）在惯性参考系中的位置变化进行分析。并给出动点，动点的轨迹，动点的速度矢量，动点的加速度矢量等基本概念。并以不同的几种方式试对上述概念进行数学描述。

§6-1　矢量法

在地球惯性参考系（体）上任取一定点 O。对空间中任意一点 A，以 O 点为起始点，A 点为末端点作有向值线段，$\overrightarrow{OA}$ 且记

$$\boldsymbol{r}_A = \overrightarrow{OA}$$

则称 $\boldsymbol{r}_A$ 为 A 点相对 O 点的**位置矢量**。若 A 点泛指空间中的一般点，$\boldsymbol{r}_A$ 也记为 $\boldsymbol{r}$。

质点作为仅由孤立物质点构成的刚体，在宏观尺度上，质点在空间所占具的位置可由与质点在空间重叠的几何点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 唯一对应。

一、质点的运动方程和轨迹

质点在空间的位置随时间的不同而发生变化，质点在空间位置随时间的变化而导致变化称为质点的运动。质点运动的数学表述称为质点的运动方程。

在地球惯性参考系（体）中取定 O 点时，在任意时刻 t，质点的空间位置矢量唯一确定。即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{6-1}$$

随 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$中时刻 t 在其取值区间段的不同取值，质点将在空间占具不同的位置。参数 t 被称为时间参数，或称为时间。

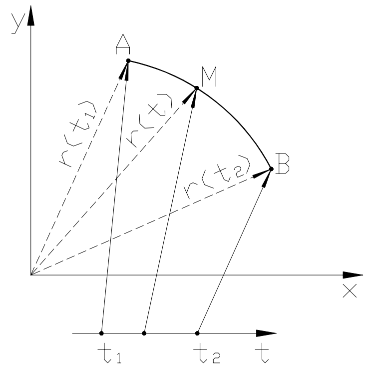
对质点，在时间的取值区间$[a,b]$<<或（a,b）、$[a,b)$、$(a,b]$>>位置矢量时间（参数）变化的函数表达式（矢量表示）

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

称为质点在给定的时间取值区间内的运动方程。在一般的运动学分析中，质点运动方程中的时间参数取值区间总被认为是任意给定了的。因此通常就称 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 是质点的运动方程。

当质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 一但给定，位置矢量在时间参数的取值区间的每一个时间参数取值所确定的位置矢量末端点集合称为质点的运动轨迹。质点的运动轨迹在三维空间中的几何表示为一条空间曲线。且该曲线就是位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 末端点在时间参数的取值区间的每一个时间参数取值的三维空间矢端曲线。

质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$；质点的运动轨迹；矢量运动方程的矢端曲线分别描述了质点空间的位置变化、质点在空间可能占具的位置、质点运动轨迹的几何表示。如图 6-1 所示质点在 *oxy* 面内的运动。图 6-1 中 *M* 为在 *oxy* 面内运动的质点，或称为动点 *M*。



动点 *M* 的运动方程：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}\\ t\in[t_1,t_2]\end{cases}$$

图 6-1

动点 *M* 的运动轨迹：

$$\{(x,y)\,|\,x=x(t),y=y(t);t_1\le t\le t_2\}$$

动点 *M* 的矢端曲线：

oxy 平面内的 *AB* 曲线段

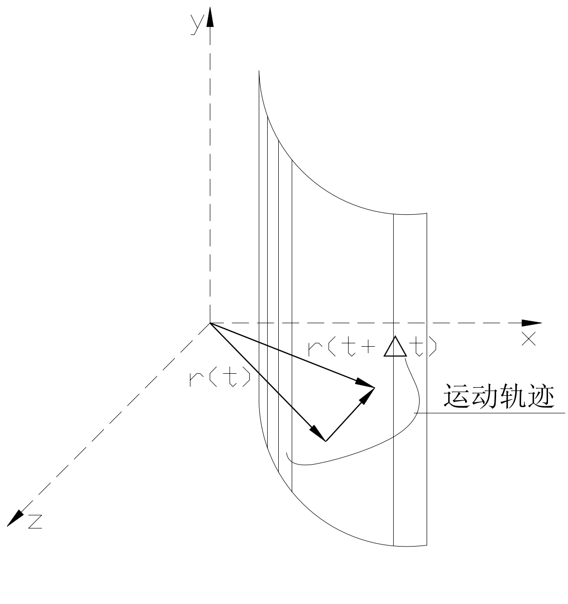
一般情况下，运动轨迹所满足的方程称为轨迹方程。而运动方程 $\boldsymbol{r}$=$\boldsymbol{r}(t)$的矢端曲线习惯上称为运动轨迹曲线，或称为运动轨迹。

二、运动质点的速度矢量（*v*）

对于运动的质点 *M*，当其运动已知时，即给定：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

考虑在 t 和 $t+\Delta t(t\in[t_1,t_2])$ 时间间隔内 $\boldsymbol{r}$ = $\boldsymbol{r}(t)$的变化率。如图 6-2 所示。



$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

图 6-2

定义平均速度矢量：

$$\boldsymbol{v}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (6\text{-}2)$$

$\boldsymbol{v}^*$是在 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻运动质点每单位时间内 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 与 $\boldsymbol{r}$(t)两矢量差。值得注意

的是在 t 和 $t+\Delta t$ 的时间隔内 $\boldsymbol{v}$*的方向保持不变。

由平均速度矢量 $\boldsymbol{v}^*$可定义一动点在时刻 t 的速度 $\boldsymbol{v}$。

定义：质点在其运动时刻 t 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 为极限

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}^* \tag{6-3a}$$

或将运动质点在 t 时刻的速度矢量记为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{6-3b}$$

即运动质点在 t 时刻的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 定义为质点运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$对时间参数 t 的一阶导数。

质点速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在运动轨迹上的几何意。如图 6-3 所示在球面曲线 AB 上运动的质点，其运动方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

在 $t+t^*$时刻，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+t^*)$确定 o' 点。由（6-3a）可求得

$$\boldsymbol{v}_O=\overrightarrow{OC}\text{；}\quad \boldsymbol{v}_{O'}=\overrightarrow{O'D}$$

将 $\overrightarrow{O'D}$ 矢量平行移动到 $\overrightarrow{OE}$ 。则 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 矢量构成一平面。显然速度矢量 $\boldsymbol{v}_o$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 矢量构成的平面内。且随 t^*的不同取值，$\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 矢量构成的平面也将变化。但无论 t^* 怎样取值，$\boldsymbol{v}_0$ 速度矢量总在 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 矢量构成的平面内。由此定义当 $t^*\to 0$ 时的 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 矢量构成的平面为密切面。且 $\boldsymbol{v}_o$ 沿运动轨迹上 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$未端点的密切面内的切线方向。

密切面是过同一点的不同曲线所具有的几何性质。过同一点的两条曲线在这一点的密切面是可以不同的。密切面不是空间一点所具有的性质，而是曲线所具有的性质。如图 6-3 中过 O 点的另一质点的运动轨迹 ab（虚线）曲线。在 $t+t^*$时刻，在 ab 曲线上运动的质点的运动方程 $\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{\boldsymbol{r}}(t+t^*)$ 确定 $\overline{O}$ 点。由（6-3a）可求得

$$\bar{\boldsymbol{v}}_o=\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}\text{；}\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{o}}=\overrightarrow{\overline{O}d}$$

显然当 $t^*\to 0$ 时，$\overrightarrow{\overline{O}d}$ 与 $\bar{\boldsymbol{v}}_o$ 构成在 ab 曲线上运动的质点的 t 时刻速度矢量 $\bar{\boldsymbol{v}}_0$ 所在的密切面。且 AB 曲线和 ab 曲线在 O 点的密切面一般不是同一个平面。

速度矢量 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 的大小记为 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(t)}$ 。则

$$v=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{v}_+}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_0 \tag{6-4}$$

式中 $\boldsymbol{v}_+$是在 $\boldsymbol{r}$ 点的 $\boldsymbol{v}$ 矢量指定的一个正方向的矢量。

由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$运动方程所确定的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 是：

① 矢量形式的运动方程的时间变化率；

② 速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$；

③ 速度 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{v}_0$ 上的投影为 $v=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_0$；

④ 速度 $\boldsymbol{v}$ 的量纲（单位）为 $\boldsymbol{v}$ 的量纲（单位），即[米]/[秒]（或记为 m/s）。

例 6-1 如图所示在 $\dfrac{5}{12}$ 圆弧上运动的质点 M。若圆的半径为 R；小球的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的大小$|\boldsymbol{v}|=\bar{v}\sin\varphi t$($\bar{v}$ 为一常数)。

1．试确定 M 质点的运动方程。

2．给出质点的运动方程矢端曲线。

3．给出质点的速度矢量端曲线。

解：

1.

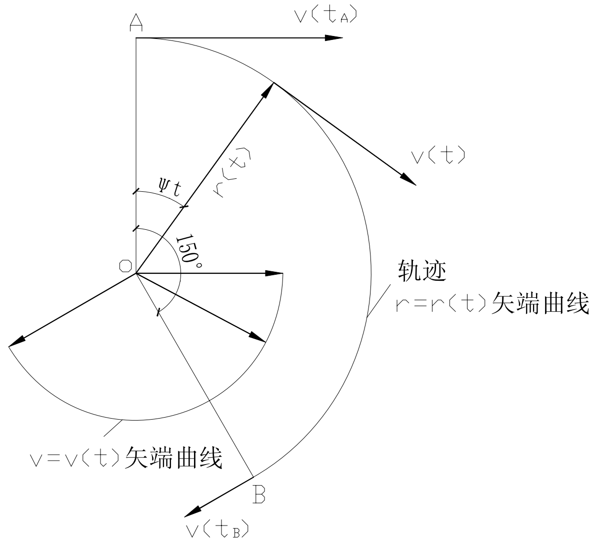


图 6-4

$$\boldsymbol{r}(t)=(R\cos\varphi\, t)\frac{\overrightarrow{OA}}{R}+(R\sin\varphi\, t)\frac{\overrightarrow{OB}}{R} \quad ; \quad (0°\le\varphi\, t<90°)$$

$$\boldsymbol{r}(t)=-(R\cos(150°-\varphi\, t))\frac{\overrightarrow{OA}}{R}+(R\sin\varphi\, t)\frac{\overrightarrow{OB}}{R} \quad ; \quad (90°\le\varphi\, t<150°)$$

$$=(R\cos\varphi\, t)\frac{\overrightarrow{OA}}{R}+(R\sin\varphi\, t)\frac{\overrightarrow{OB}}{R}$$

∴ M 质点的运动方程（矢量）为

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OA}\cos\varphi\, t+\overrightarrow{OB}\sin\varphi\, t \quad ; \quad (0°\le\varphi\, t<150°)$$

2．质点的运动轨迹为图中 AB 圆弧。

3． $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=-\overrightarrow{OA}\,\varphi\sin\varphi\, t+\overrightarrow{OB}\,\varphi\cos\varphi\, t$

$$|\boldsymbol{v}|^2=(|\overrightarrow{OA}|\varphi)^2+(|\overrightarrow{OB}|\varphi)^2=R^2\varphi^2=\bar{v}^2$$

规定由 A 到 B 为正方向。则

$$v=R\varphi=\bar{v}$$

速度矢 曲线如图 6-4 所示。

三、运动质点的加速度矢量（$\boldsymbol{a}$）

对运动质点的运动方程的矢量表达式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$求一阶时间变化率得质点在 t 时刻的速度矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,(t)$。对速度矢量，在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的速度矢量分别为 $\boldsymbol{v}\,(t)$ 和 $\boldsymbol{v}\,(t+\Delta t)$。作 t 和 $t+\Delta t$ 两时刻的速度矢量差，也可以求得Δt 时间间隔内的平均速度变化率：

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \qquad (6\text{-}5)$$

$\boldsymbol{a}^*$称为 t 和 $t+\Delta t$ 时间间隔内的平均加速度。由平均加速度同样可以定义运动质点在 t 时刻的加速度。

定义：质点在其运动时刻 t 的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 为极限

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}^* \qquad (6\text{-}6a)$$

或将运动质 t 时刻的加速度矢量记为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (6\text{-}6b)$$

即运动质点在 t 时刻的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 定义为质点运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$对时间参数的二阶导数；或是运动质点的速度矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$对时间参数 t 的一阶导数。

质点加速矢量 $\boldsymbol{a}$ 的几何意义如图 6-5 所示。将在运动轨迹上每点的质点运动速度矢量 $\boldsymbol{v}(t)$作为自由矢量。按平行性，将 $\boldsymbol{v}(t)$的起始点平行移 o 点。速度矢量 $\boldsymbol{v}(t)$的末端点构成一矢量 $\boldsymbol{v}$(t)矢端曲线<<不是运动轨迹。运动轨迹是矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的矢端曲线。但一般矢量的矢端曲线不是运动轨迹>>。为了更为直观，以质点的平面运动为例，如图 6-5 所示。显然加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 是速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 的矢端曲线上对应的 t 时刻密切面内的切线上的矢量。但必须胆确的是加速度矢量 $\boldsymbol{a}(t)$是在 t 时刻的运动轨迹上对应点处的加速度矢量。

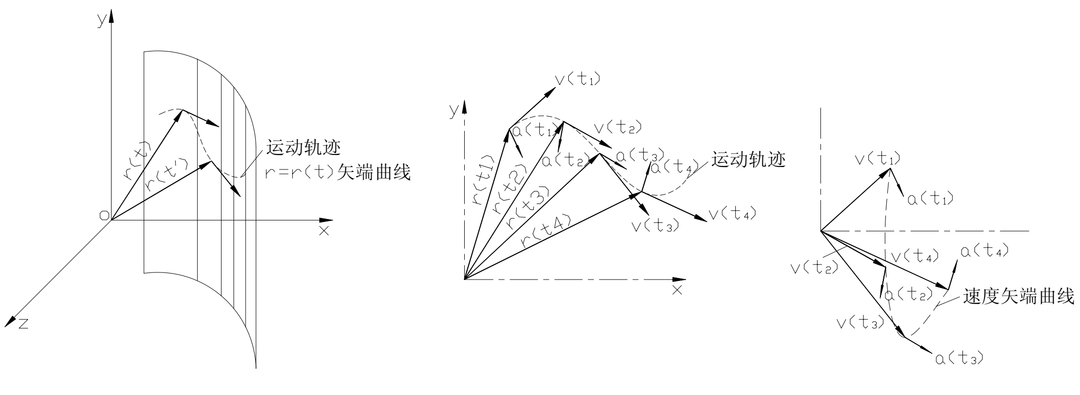


图 6-5

对加速度矢量 $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{u}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ 同样可以定义其大小|$\boldsymbol{a}$|和 a。即

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}(t)} = \sqrt{\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}(t)}$$

$$a = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{a}_+}{|\,\boldsymbol{a}\,|} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}_0$$

式中 $\boldsymbol{a}_+$是在 $\boldsymbol{r}$ 点的 $\boldsymbol{a}$ 矢量指定的一个正方向矢量。

由 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$运动方程，或 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$速度方程所确定的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 是：

① 矢量形式运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$对时间的二阶变化。或是矢量形式速度方程 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$对时间的变化率；

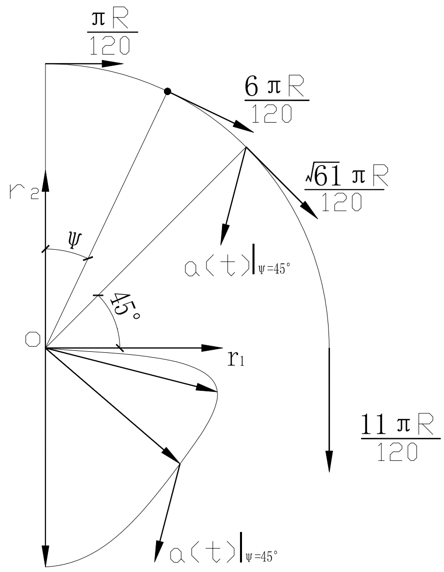
② 加速度的 $\boldsymbol{a}$ 的大小为$|\,\boldsymbol{a}\,| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ ；

③ 加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}_0$ 上的投影为 a；

④ 加速度 $\boldsymbol{a}$ 是速度矢量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$矢量端图上 t 是刻密切面内切线上的矢量所确定的；

⑤ 加速度 $\boldsymbol{a}$ 是质点运动轨迹上 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$所确定的点处的矢量；

⑥ 加速度的量纲（单位）为 a 的量纲（单位），即[米]/[秒][秒]（或记为 m/s^2）。



例 6-2　如图 6-6 所示在半径为 R 的四分之一圆上作平面运动的动点 M。动点 M 的运动方程为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}(t) = (\sin\varphi\,\boldsymbol{r}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{r}_2)R \\ \varphi = (3t^2 + 6t)^2/720\end{cases}$$

试求：

①M 动点的速度矢量端图；

②在速度矢量端图上给出当$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$时的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$；

③在运动轨迹上给出当$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$时的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$。

解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{r}_1 - \dot\varphi\sin\varphi\,\boldsymbol{r}_2)R \\ \dot\varphi = (t+1)^2/120\end{cases}$$

图 6-6

$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}\,(t) = -(\dot\varphi\sin\varphi_1\boldsymbol{r}_1 + \dot\varphi\cos\varphi_1\boldsymbol{r}_2)\,\dot\varphi\,R + (\cos\varphi\,\boldsymbol{r}_1 - \sin\varphi\,\boldsymbol{r}_2)\,\ddot\varphi\,R$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}(t) = (\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi)\,R\boldsymbol{r}_1 - (\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi)\,R\boldsymbol{r}_2 \\ \dot\varphi = (t+1)\pi/120 \\ \ddot\varphi = \pi/120\end{cases}$$

①M 动点的速度矢量端图

$t = 0$　　$\dot\varphi = \dfrac{\pi}{120}$，$\varphi = 0$

$$\boldsymbol{v}(t)\,|_{t=0} = R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{r}_1 = \frac{\pi R}{120}\boldsymbol{r}_1$$

$t = 5$ $\quad \dot{\varphi} = \dfrac{6\pi}{120}$，$\varphi = 26.25°$

$$\boldsymbol{v}(t)\,|_{t=5} = (\cos 26.25°\,\boldsymbol{r}_1 - \sin 26.25°\,\boldsymbol{r}_2)\frac{6\,\pi\,R}{120}$$

$t = 10$ $\quad \dot{\varphi} = \dfrac{11\pi}{120}$，$\varphi = 90°$

$$\boldsymbol{v}(t)\,|_{t=10} = -\frac{11\,\pi\,R}{120}\boldsymbol{r}_2$$

M 动点的速度矢量端图如图 6-6 所示。

② $\quad \varphi = 45° = \pi/4$

$$t = \sqrt{61} - 1$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{61}\pi}{120}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\pi}{120}$$

$$\boldsymbol{a}(t)\,|_{\varphi=45°} = \frac{\sqrt{2}}{2}R\,[(\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}_1 - (\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}_2]\;|_{\varphi=45°}$$

$$|\,\boldsymbol{a}(t)\,|_{\varphi=45°}| = \frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)} = \sqrt{1 + \left(\frac{61\pi}{120}\right)^2}\,\frac{\pi\,R}{120}$$

$\boldsymbol{a}(t)\,|_{\varphi=45^0}$ 的几何表示如图 6-6（轨迹表示和速度矢量端图表示）

§ 6-2　点的运动（直角坐标法）

当点的运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ (t)一但给定。则按（6-3a）或（6-3b）可确定点运动时的速度矢量 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$；按（6-6a）或（6-6b）可确定点运动时的加速度矢量 $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$。由于 $\boldsymbol{r}(t)$、 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$都是三维空间中的矢量。且 $\boldsymbol{r}(t)$是起始点固定在 O 点的约束矢量<<矢量起始点被约束不动的矢量称为约束矢量>>，$\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$则是自由矢量<<矢量起点可以变化的矢量称为自由矢量>>。无论是约束矢量，还是自由矢量都可以在矢量起点处的一组（三维空间是三个）线性无关的矢量线性表示。这一组线性无关的矢量称为矢量表示的基底。而任意矢量在基底上线性表示的系数称为矢量在该基底上的坐标。对 $\boldsymbol{r}(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$矢量的分析可采用在一组给定基底上的分析。这样的分析方法称为坐标法。本章中只考虑直角坐标法和自然坐标法两种基本矢量坐标分析。

所谓直角坐标法是在三维空间的每一点处按矢量的平行性给出一组三个相互正交的单位长度基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。并给定任一确定不变的点，由该点和该点处<<通常该点取在 $\boldsymbol{r}(t)$的起始点处>>一组基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成直角坐标系。若该点标记为 O，则{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}称为三维空间的一个直角坐标系。且称 O 点为该坐标系的原点，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为该坐标系的基矢量，而过 O 点沿 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的三条分别与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 指向一致的有向直线称为该坐标系的 x、y、z 坐标轴。如图 6-7 所示。

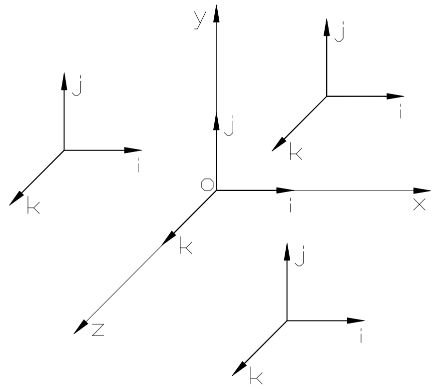


图 6-7

对运动的动点的运动学分析，当给定直角坐标系{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}，其运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$；速度矢量 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)$；加速度矢量 $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ 都可以在{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系中表示为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x\,(t)\boldsymbol{i}+y\,(t)\boldsymbol{j}+z\,(t)\boldsymbol{k} \tag{6-7a}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k} \tag{6-7b}$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k} \tag{6-7c}$$

（6-7a）称为运动方程的{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}直角坐标系表示的运动方程，$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$称为运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在{$O$；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系中的坐标。对给定的时刻 t、$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$完全确定了运动质点在三维空间中的位置。当将 t 作为 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$坐标的参数时，由

$$\begin{cases} x=x\,(t) \\ y=y\,(t) \\ z=z\,(t) \end{cases} \tag{6-8}$$

中消去参数 t 所得三维空间的{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系表示的空间曲线就是运动轨迹。

在{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}直角坐标系中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不随位置的变化而改变（即三维空间的每一点处的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 都是相同的）；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不随时间的变化而改变（即在任何时刻 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 也都是相同的）。因此有

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial z}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}=0 \\
\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial z}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}=0 \\
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial x}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial z}=0\,;\ \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial t}=0
\end{gathered} \tag{6-9}$$

由（6-7b）式：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}[x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}] \\
&= \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + x(t)\boldsymbol{o} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + y(t)\boldsymbol{o} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k} + z(t)o \\
&= \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k} \\
&= v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_2(t)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\begin{cases}
v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\
v_y = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\
v_z = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{z}(t)
\end{cases}
\qquad (6\text{-}10)
$$

该式表明速度矢量 $\boldsymbol{v}(t)$在 $\boldsymbol{v}$ 的起始矢量点处的基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的坐标等于 $\boldsymbol{r}(t)$在 O 点基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的坐标对时间（参数）的一阶导数。如图 6-8 所示，对直角坐标系{O; $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的坐标与 $\boldsymbol{r}(t)$在对应轴上的投影相等；$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 基底上的坐标与 $\boldsymbol{v}(t)$在对应轴上的投影相等。因此（6-10）式也可以表述为，动点的速度矢量 $\boldsymbol{v}(t)$在其起始点处 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影等于其对应的运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$在 O 点处 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影时间（参数）的一阶导数。

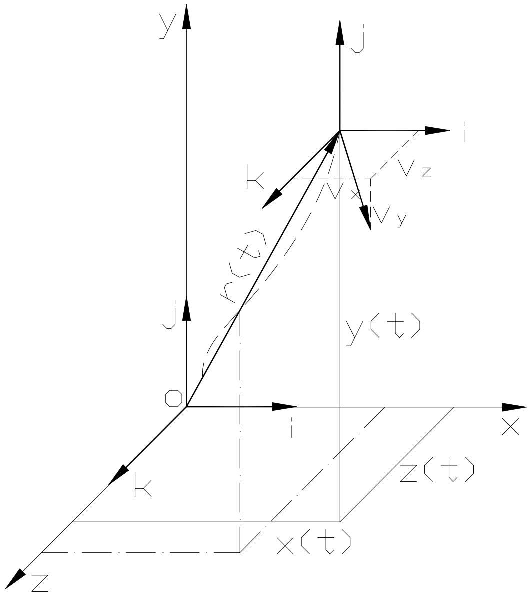


图 6-8

由（6-7b）和（6-10）可得

$$
\begin{cases}
|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_2)^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \\
\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \dfrac{v_x}{|\boldsymbol{v}|}; \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \dfrac{v_y}{|\boldsymbol{v}|}; \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \dfrac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}
\end{cases}
\qquad (6\text{-}11)
$$

由（6-7c）式同样可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(t) &= \ddot{x}(t)\boldsymbol{i} + \ddot{y}(t)\boldsymbol{j} + \ddot{z}(t)\boldsymbol{k} \\
&= \dot{v}_x(t)\boldsymbol{i} + \dot{v}_y(t)\boldsymbol{j} + \dot{v}_z(t)\boldsymbol{k} \\
&= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\
a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\
a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z(\boldsymbol{t}) = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t)
\end{cases}
\qquad (6\text{-}12)
$$

$$\begin{cases} |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} \\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}; \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}; \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}) = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \end{cases} \qquad (6\text{-}13)$$

（6-12）式表明加速度矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的起始矢量点处的基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的坐标等于 $\boldsymbol{r}(t)$在 O 点基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的坐标对时间（参数）的二阶导数。或者表述为，动点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 在其起点处 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影等于其对应的运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$在 O 点处 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影对时间（参数）的二阶导数。

对于动点作平面运动情况，取动点运动平面为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 所在平面。则有：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} \end{cases} \qquad (6\text{-}14)$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ v_y = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \end{cases} \qquad (6\text{-}15)$$

$$\begin{cases} |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \dfrac{v_x}{|\boldsymbol{v}|}; \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) = \dfrac{v_y}{|\boldsymbol{v}|} \end{cases} \qquad (6\text{-}16)$$

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t) \\ a_y = \ddot{v}_y(t) = \ddot{x}(t) \end{cases} \qquad (6\text{-}17)$$

$$\begin{cases} |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2} \\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}; \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} \end{cases} \qquad (6\text{-}18)$$

例 6-3　如图 6-9 所示。(质点抛射运动）若动点在{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$}坐标系所在平面的运动方程为：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = v_0 t\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + (v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

式中 v_0 为初速度的大小，α 是初速倾角，$\boldsymbol{g}$ 是重力加速度。求：

1．质点的运动轨迹方程。

2．质点运动轨迹曲线。

3．速度矢量端图。

4．$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的表达。$|\boldsymbol{a}|$=？ $|\boldsymbol{v}|$=？

解：

1． $\begin{cases} x = x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y = y(t) = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

消去参数 t 得质点运动轨迹方程

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\,(v_0)^2}(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)$$

2．质点运动轨迹曲线如图 6-9 所示。

3． $\boldsymbol{v} = v_0\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\boldsymbol{j}$

$t=0$： $|\boldsymbol{v}|=v_0$ ； $\boldsymbol{v} = v_0\left[\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j}\right]$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|} = \cos\alpha$$

$t = \dfrac{v_0}{g}\sin\alpha$： $|\boldsymbol{v}| = v_0\cos\alpha$ ； $\boldsymbol{v} = v_0\cos\alpha\,\boldsymbol{i}$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|} = 1$$

$t = \dfrac{2v_0}{g}\sin\alpha$： $|\boldsymbol{v}| = v_0$ ； $\boldsymbol{v} = v_0\left(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} - \sin\alpha\,\boldsymbol{j}\right)$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|} = \cos\alpha$$

速度矢端图如图 6-9 所示。

4． $\boldsymbol{v} = v_0\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{a} = -g\,\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

$$|\boldsymbol{a}| = g$$

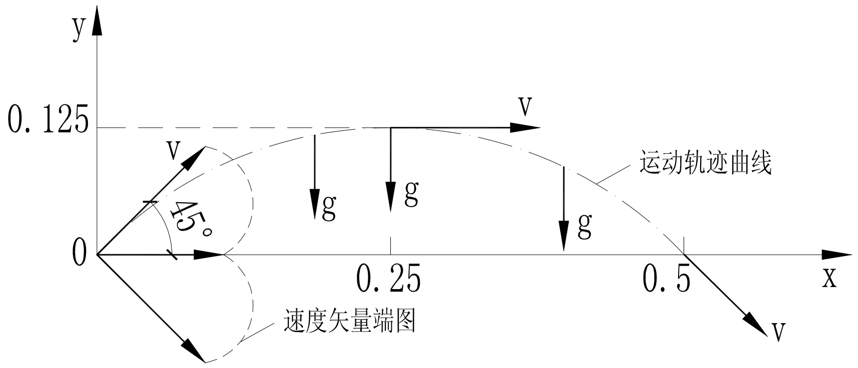


图 6-9

例 6-14　如图 6-10 所示曲柄连杆滑块机构。若曲柄 OA 绕垂直 oxy 面的过 O 点的轴转动，且转动规律为 $\varphi=\omega t$ 。试求连杆 AB 上 C 点的运动方程；轨迹方程；速度矢量 $\boldsymbol{v}$；加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 及$|\boldsymbol{v}|$、$|\boldsymbol{a}|$。

解：

在图示 oxy 坐标系中，C 点的坐标为

$$\begin{cases} x = L\cos\varphi + \dfrac{3}{4}L\cos\varphi = \dfrac{7}{4}L\cos\omega t \\ y = \dfrac{1}{4}L\sin\varphi = \dfrac{1}{4}L\sin\omega t \end{cases} \qquad \text{（a）}$$

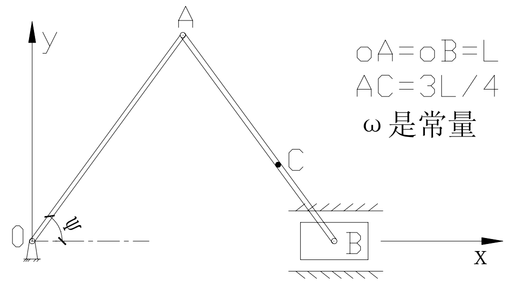


图 6-10

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j}$$
$$= \frac{7}{4}L\,cos\,\omega\,t\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}L\,sin\,\omega\,t\,\boldsymbol{j}$$

由（a）式中消去时间参数得 C 点的运动轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{7}{4}L\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{1}{4}L\right)^2} = 1$$

该方程表明 C 点在 oxy 面内的运动轨迹曲线是一椭圆。

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{7}{4}L\omega\sin t\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}L\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{7}{4}L\omega^2\,cos\,\omega\,t\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}L\omega^2\,sin\,\omega t\,\boldsymbol{j}$$

$$|\,\boldsymbol{v}\,| = \frac{1}{4}L\omega\sqrt{49\,cos^2\,\omega\,t + sin^2\,\omega\,t}$$

$$|\,\boldsymbol{a}\,| = \frac{1}{4}L\omega^2\sqrt{49\cos^2\omega\,t + \sin^2\omega\,t}$$

§6-3　点的运动（自然标架法）

在点的运动直角坐标法中，在三维空间的每一点处构造了完全相同的矢量基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。并且引入了直角坐标系{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}，将质点的运动表示成依赖时间（参数）的点空间位置坐标的形式。即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

对于质点的运动，在{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}坐标系中，上式完全刻画了质点的运动方程。且通过对其的一阶、二除时间导数，也完全刻画了质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$。直角坐标法对质点运动的描述实质上是将依赖时间参数变化的质点坐标与质点的运动联系在一起。对质点运动的描述除将依赖时间参数变化的质点坐标与质点的运动联系在一起外，还有其它形式对质点运动的描述。在理论力学中对**已知质点运动轨迹时，可取依赖于时间参数的运动轨迹曲线的弧长来描述质点运动**。这种方法称为**自然标架法**。或称为**自然法**。

自然标架法与直角坐标法所不同的是：自然标架法是在运动轨迹曲线上的每一点建立一组独立的矢量 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 作为与该点相关的运动学矢量（$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$）的一组基底。且这一组基底依赖运动轨迹的弧长。

如图 6-11 所示运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$在三维空间中唯一确定质点运动的运动轨迹 OS<<OS 为空间曲面 $ABCD$ 内的一条空间曲线。图中 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 为空间曲面在一平面内上的投影>>。当运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$给定，运动质点的运动轨迹在三维空间 $ABCD$ 曲面上的空间曲线 OS 被唯一确定。在直角坐标系中，该曲线通过给定坐标系{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}的三个坐标与时间参数的参数方程

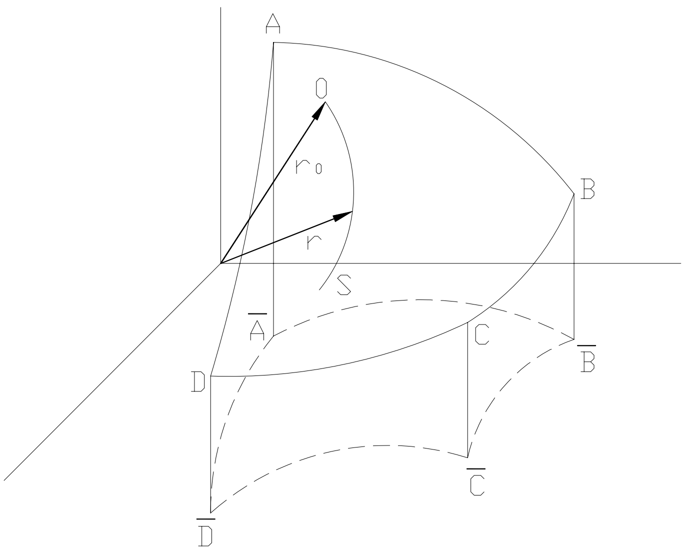


图 6-11

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

唯地表式。考虑 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$所定的质点运动轨迹曲线上两点所确定的微弧长 ds。显然

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= [\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)]\cdot[\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)] \\ &= [x(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + y(t+\Delta t)\boldsymbol{j} + z(t+\Delta t)\boldsymbol{k} - x(t)\boldsymbol{i} - y(t)\boldsymbol{j} - 2(t)\boldsymbol{k}] \\ &\quad \cdot[x(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + y(t+\Delta t)\boldsymbol{j} + z(t+\Delta t)\boldsymbol{k} - x(t)\boldsymbol{i} - y(t)\boldsymbol{j} - 2(t)\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

将 $x(t+\Delta t)$、$y(t+\Delta t)$、$z(t+\Delta t)$在 t 处按泰勒级数展开为：

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\dot{x}dt+o(dt)$$

$$y(t+\Delta t)=y(t)+\dot{y}dt+o(dt)$$

$$z(t+\Delta t)=z(t)+\dot{z}dt+o(dt)$$

将展开结果代入$(ds)^2$的表达式得

$$(ds)^2=(\dot{x}dt)^2+(\dot{y}dt)^2+(\dot{z}dt)^2$$

$$ds=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}dt$$

对注意给定的 t_0 时刻，$\boldsymbol{r}(t_0)$对应着质点运动轨迹曲线上一点（如图中的 O 点）。以 O 为基准点，任意时刻 t，$\boldsymbol{r}(t)$所对应的质点运动轨迹曲线的点与 O 点之间的运动轨迹曲线弧长 S 为

$$\begin{aligned} S&=\int_{r_0}^{r}ds \\ &=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}dt \end{aligned} \tag{6-19a}$$

或记为

$$S=S(t) \tag{6-19b}$$

该式称为以时间为参数的运动轨迹曲线的弧长表达式。或称为运动质点的弧长坐标形式的运动方程。

对运动质点，若弧长坐标形式的运动方程给定，则质点的运动轨迹被唯一确定。但运动质点运动学特征的另外两个量速度矢量和加速度矢量都是具有大小和方向的量。因此速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 必须在给定的一组（三个）线性无关的基底矢量上表示。在直角坐标法中，在空间的每一点都给定了一组（三个）基底矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。且运动质点在运动轨迹的每一点处的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 都在其所在点处的一组基底 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上被表示为

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}(t)\boldsymbol{i}+\dot{y}(t)\boldsymbol{j}+\dot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}(t)\boldsymbol{i}+\ddot{y}(t)\boldsymbol{j}+\ddot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

即速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 用运动质点轨迹的直角坐标系的坐标

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

对时间（参数）的一阶导数和二阶导数表示。当运动质点的轨迹用弧长坐标形式给出时，为了确定质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$，则必须给出依赖于弧长的、运动质点轨迹上每一点处的基底矢量。为此对运动轨迹曲线的几何性质进行分析。

一、自然标架

如图 6-12 所示运动质点的空间运动轨迹曲线。在 t 时刻 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$确定运动质点处于空间运动轨迹的 A 点，其速度矢量为 $\boldsymbol{v}_A$。当质点运动到空间运动轨迹上的 C 点时，其速度矢量为 $\boldsymbol{v}_C$。将 $\boldsymbol{v}_C$ 按自由矢量的平行性，平行移至 $\boldsymbol{v}'_C$ 时，$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}'_C$ 构成一平面（m）。同样，当质点运动到空间运动轨迹上的 B 点时，其速度矢量为 $\boldsymbol{v}_B$。将 $\boldsymbol{v}_B$ 按自由矢量的平行性，平行移至 $\boldsymbol{v}'_B$，$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}'_B$ 构成一平面（n）。图中可以看出，

图 6-12

当弧长 $S_{AB} < S_{AC}$ 时，（n）面可看作是（m）面沿图示 θ 的转向转过 θ 角而得到。当 B 点无限接近 A 点时，$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}'_B$ 所确定的平面（n）无限接近一平面，该平面称为密切面。对于空间运动轨迹曲线，一般情况下，不同空间运动轨迹上的点的密切面是不相同的。若**运动质点的运动轨迹曲线上每一点的密切面都是同一平面，则称质点的运动为（密切面内）平面运动**。

对于质点的空间运动，按空间运动轨迹曲线定义了空间运动轨迹曲线上每一点的密切面。如图 6-13 所示。对空间运动轨迹曲线上的任意点，按一半经 ρ 作该点的与该点相切的密切面内的圆。过密切面内圆的圆心及 A 点与密切面正交的面称为法平面。由 A 点所确定的密切面和法平面可构造另一平面，使三个平面两两正交。这样的三个平面构成了 A 点处三条交线。即密切面与法平面的交线——主法线；第三个面与密切面的交线——切线；第三个面与法平面的交线——副法线。切线、主法线、副法线称为 A 点处的自然轴。显然对于运动质点的空间运动轨迹曲线上的每一点都存在由切线、主法线、

图 6-13

副法线构成的自然轴，且运动质点的空间运动轨迹曲线上每一点处的自然轴一般是不相重合的。

对运动质点的空间运动轨迹曲线上的每一点，按速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 给出了密切面的几何概念。并由此在空间运动轨迹曲线的每一点上确定了切线、立法线、副法线的自然轴。当在切线、主法线、副法线轴上分别给定三个单位矢量，则这三个单位矢量构成一组（三个）基底矢量。一但质点的运动方程的弧坐标形式给定<<同时给定弧长的度量起点和弧长的增加方向>>，则运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$也可用弧长表示。即由 S_0 到空间运动轨迹曲线上任意一点的 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，由 S_0 至 S_t 段的弧长 S 唯一确定。如图 6-14 所示。因此

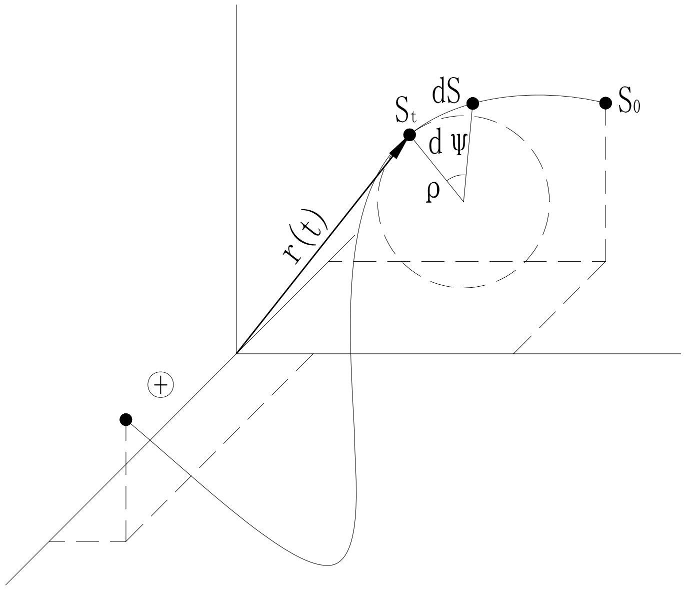


图 6-14

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s(t))$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\dot{\boldsymbol{r}}(s(t))\\&=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt}\end{aligned}$$

对运动质点，若引入直角坐标系{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}，由 ds 与直角坐标系中坐标的关系

$$ds=\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\,dt$$

可得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}=|\boldsymbol{v}|$$

因此得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(s(t))&=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\frac{ds(t)}{dt}\\&=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}|\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

该式表明 $d\boldsymbol{r}(s)/ds$ 确定了 $\boldsymbol{v}$ 的单位方向，即

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=1$$

令：

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=\boldsymbol{\tau}\text{；}\quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}=1$$

则：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{\tau} = v\boldsymbol{\tau} \qquad (6\text{-}20)$$

由 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau} = 1$ 得

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}) = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \perp \boldsymbol{\tau}$$

令 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \overline{\boldsymbol{n}}$，则

$$\overline{\boldsymbol{n}} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

在 t 时刻，ds 可用空间运动轨迹曲线上 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 处的密切面内切于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$处的半径为 ρ 的微弧表示，即

$$ds = \rho d\varphi$$

$$\overline{\boldsymbol{n}} = v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{\rho d\varphi} = \frac{v}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi}$$

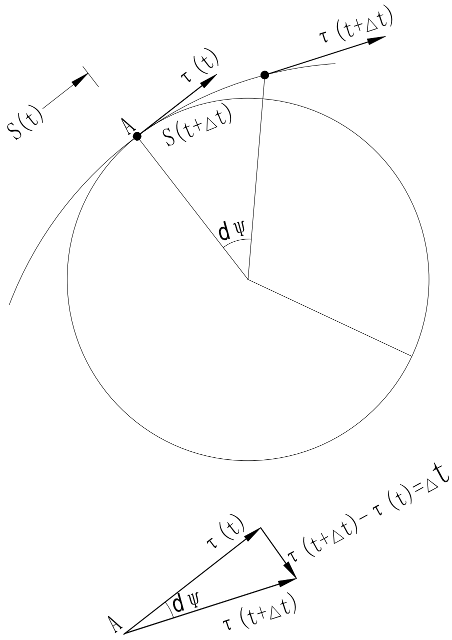


图 6-15

因为$\boldsymbol{\tau}$、ρ、φ 都是密切面内的量。将空间运动轨迹曲线在 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$点处的微段向密切面内投影得空间运动轨迹曲线的密切面内表示如图 6-15 所示。显然当$\Delta t \to 0$ $(\Delta s \to 0)$ 时

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\tau}(t)$$

即 $d\boldsymbol{\tau}$ 是沿 t 时刻 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$处密切面内切于 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$处点切圆的半径 ρ 方位，且指向该切圆的圆心。记该方向（指向切圆圆心的方向）单位矢量为 $\boldsymbol{n}$。则

$$d\boldsymbol{\tau} = |d\boldsymbol{\tau}|\,\boldsymbol{n} = d\tau\,\boldsymbol{n}$$

由图 6-15 的几何关系可得：（ΔACD）

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|^2 = |\boldsymbol{\tau}(t)|^2 + |\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)|^2 - 2|\boldsymbol{\tau}(t)||\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)|\cos\Delta\varphi$$

由（6-20）可知：

$$|\boldsymbol{\tau}(t)|=1;\quad |\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)=1|$$

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|^2=2(1-\cos\Delta\varphi)=4\sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$$

当$\Delta\varphi\to 0$时：

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|^2=|d\boldsymbol{\tau}|^2;\quad \sin\frac{\Delta\varphi}{2}\to\frac{d\varphi}{2};$$

$$|d\boldsymbol{\tau}|=d\varphi$$

最后得：

$$d\boldsymbol{\tau}=d\varphi\,\boldsymbol{n}$$

$$\overline{\boldsymbol{n}}=\frac{|\boldsymbol{v}|}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi}=\frac{v}{\rho}\boldsymbol{n}$$

通过以上分析，对空间运动质点的运动轨迹曲线弧坐标表示，引入了单位矢量：

$$\boldsymbol{\tau}=d\boldsymbol{r}(s)/ds$$

$$\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{\tau}/d\tau$$

且对空间运动轨迹曲线的每一点$\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$都是切线和主法线上的单位矢量。若定义

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$

则由$\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$构成空间运动轨迹曲线上每一点处的切线、主法线、副法线上的一组（三个）两两正交的单位长度基底矢量。且称$\{s(t);\boldsymbol{\tau}、\boldsymbol{n}、\boldsymbol{b}\}$是弧长$s(t)$处空间运动轨迹曲线的自然标架。

二、自然标架的质点速度矢量*v*和加速度矢量*a*

当质点的运动方程用弧长为坐标表示为弧长坐标形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s(t)) \qquad (6\text{-}21)$$

在t时刻的速度矢量$\boldsymbol{v}$为

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}\\ |\boldsymbol{v}|=\dfrac{ds}{dt}=v;\quad \boldsymbol{\tau}=\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\end{cases} \qquad (6\text{-}22)$$

在t时刻的加速度矢量$\boldsymbol{a}$为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}) = \frac{d^2 s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \\
&= a_\tau \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}
\end{aligned}
$$

即：

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n} \\
a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\text{；}\quad a_n = \dfrac{v^2}{\rho}\text{；}\quad \boldsymbol{n} = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi}
\end{cases}
\tag{6-23}
$$

在自然标架$\{s(t);\ \boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}\}$中的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的表达式表明：

速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的大小等于运动质点的弧坐标表示的运动方程 $s=s(t)$对时间的一阶导数的绝对值。$\boldsymbol{v}$ 的方向为空间运动轨迹曲线上 $s=s(t)$点处密切面内的切线方向。

加速度矢量可在密切面内的单位速度矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 上和密切面内单位主法线上矢量 $\boldsymbol{n}$ 上被表示。在 $\boldsymbol{\tau}$ 上的表示系数为质点运动方程弧坐标表示的切向加速度 a_τ；在 $\boldsymbol{n}$ 上的表示系数为质点运动方程弧坐标表示的法向加速度 a_n；在 $\boldsymbol{b}$ 上的表示系数为质点运动方程弧坐标表示的副法向加速度 a_b，且 $a_b=0$。切向加速度 a_τ 等于运动质点的弧坐标表示的运动方程 $s=s(t)$ 对时间的二阶导数；法向加速度 a_n 等于该时刻速度矢量的大小的平方与该时刻空间运动轨迹曲线上对应点处密切面内的曲率半径的比值。$\boldsymbol{\tau}$ 的正方向与 $\boldsymbol{v}$ 的正方向一致；$\boldsymbol{n}$ 的正方向为密切面内指向曲率中心的方向（即指向空间运动曲线凹的一侧）。加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$
|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2} \tag{6-24}
$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角的正切值为

$$
\mathrm{tg}\,\theta = \frac{|a_\tau|}{a_n} \tag{6-25}
$$

当质点的运动轨迹曲线是平面曲线时，以上给出的弧坐标表示的质点运动方程；运动质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}$；运动质点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的表达式，形式上未发生变化。所不同的是，若质点运动轨迹曲线所在的面为 oxy 面，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}$。而 $\boldsymbol{\tau}$ 、$\boldsymbol{n}$ 都是 $\boldsymbol{oxy}$ 面内的单位矢量。后文中如无特别说明，质点都是作 oxy 面内的平面运动。

三、自然标架法例

例 6-5　如图 6-16 所示小环 M 同时活套在半径为 R 的固定大圆环和绕过 O 点垂直与圆环所在平面的轴转动的摇杆 OA 上。摇杆 OA 过 O 点轴以 $\varphi = \omega t$（ω 为已知常数）转动。若运动开始时（t=0），摇杆位于图示水平位置。试求小环 M 在 t 时刻的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和切向加速度 a_τ、法向加速度 a_n。

解：

首先确定小环 M 的弧坐标表示的运动方程。

1. 确定弧坐标表示的起始弧长度量点：取 t=0 时，小环 M 在运动轨迹曲线上的点为 S_0，如图 6-16 所示。

2．规定质点运动时弧长度量的正方向：取由 S_0 逆时针转向的弧长增加方向为正方向，如图 6-16 所示。

3．确定质点的运动的弧坐标表示的方程。

（a）由于质点的运动为圆周运动，因此由几何关系直接得到：

$$S = 2R\varphi = 2R\omega t$$

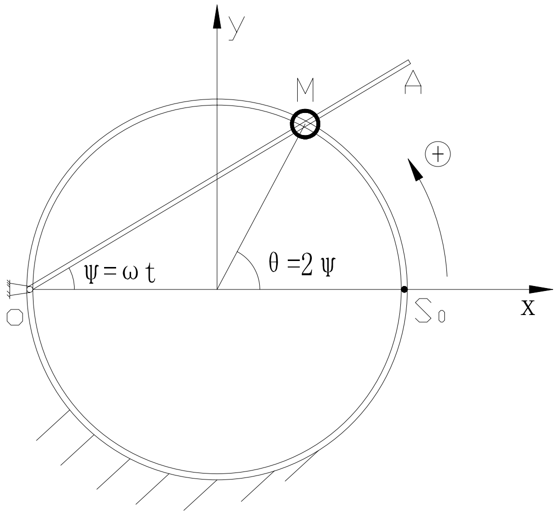


图 6-16

（b）对非圆周运动的质点，可通过引入直角坐标来确定。在图 6-16 所示直角坐标系中有：

$$x = R\cos 2\varphi = R\cos 2\omega t$$

$$y = R\sin 2\varphi = R\sin 2\omega\, t$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt = 2R\omega\, dt$$

$$s(t) = \int_0^t 2R\,\omega\, dt = 2R\omega\, t$$

4．确定小环的速度矢量 $\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}(t)\boldsymbol{\tau} = 2R\,\omega\,\boldsymbol{\tau}$$

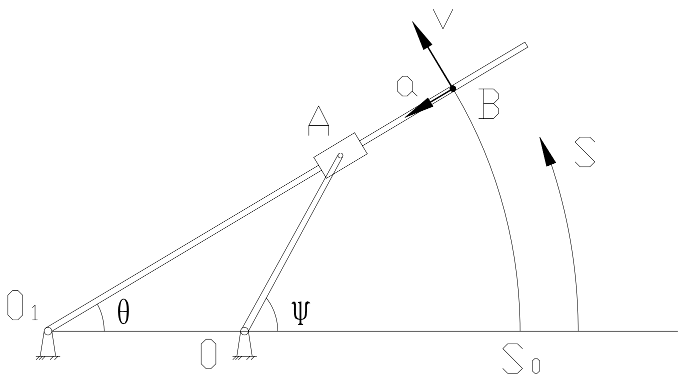
5．确定小环的切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n：

$$a_\tau = \ddot{s}(t) = 0$$

$$a_n = v^2/\rho = (2R\omega)^2/R = 4R\omega^2$$

例 6-6　如图 6-16 所示一曲柄摇杆机构。曲柄 OA 绕 O 轴逆时针方向转动。其转过 φ 角与

时间 t 的关系为 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}t$。若 $\overline{OA}=1m$；$\overline{OO_1}=1m$；$\overline{O_1B}=2.4m$。试求 B 点运动方程、速度矢量和加速度矢量。



解：

在 B 点的运动过程中 B 点与 O_1 点的距离保持不变。因此 B 点的运动轨迹曲线是以 O_1 为圆心的圆周运动。如图 6-16 所示。取 S_0 为运动方程弧坐标表示的起始点，则：

$$S=\overline{O_1B}\theta=1.2\varphi=0.3\pi t \quad (\mathrm{m})$$

$$\dot{S}=|\boldsymbol{v}|=0.3\pi \quad \mathrm{m/s}$$

图 6-16

$$\ddot{S}=0$$

$$\rho=2.4 \quad \mathrm{m}$$

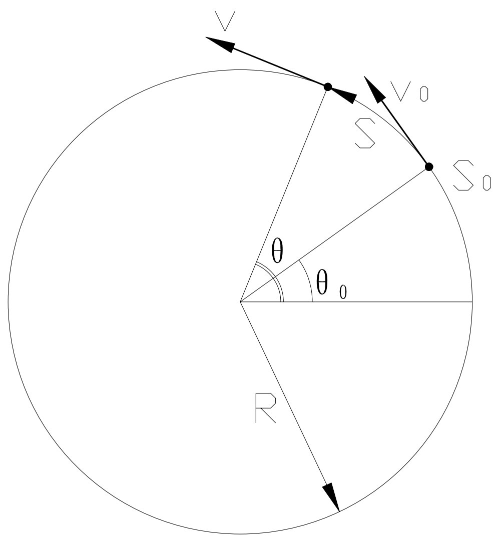
$$\boldsymbol{v}=0.3\pi\,\boldsymbol{\tau}\ (\mathrm{m/s})$$

v = 0.9425m/s

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}=\frac{3}{80}\pi^2\boldsymbol{n}(\mathrm{m/s^2})$$

a = 0.3701 m/s^2

例 6-7　一沿半为 R 的圆周运动的动点 M，如图 6-17 所示。其速度矢量 v 与加速度矢量 a 之间夹角保持不变。试求：



1. 以圆心角参数表示的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的表达式。

2．用时间参数表示的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的表达式。

解：

质点作圆周运动，其弧坐标形式的运动方程为：

$$s(t)=R(\theta-\theta_0)$$

∵　　$v/a=\bar{k}$　（k 为常数）

$$a = v^2 / R$$ 图 6-17

$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}_\tau$ 共线

∴ $$a_\tau / a_n = k$$

1. $$\frac{dv}{dt} = \frac{kv^2}{R}$$

$$\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{kv^2}{R}$$

$$v\frac{dv}{d(R\theta - R\theta_0)} = \frac{kv^2}{R}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = kv$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta} kd\theta$$

$$\ln(v / v_0) = k(\theta - \theta_0)$$

$$v = v_0 e^{k(\theta - \theta_0)}$$

2. $$\frac{dv}{dt} = \frac{kv^2}{R}$$

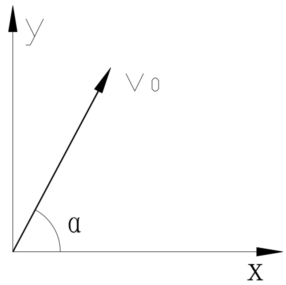
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{R}\int_0^t dt$$

$$v = v_0 /(R - v_0 kt)$$

例 6-8 如图 6-18 所示，质点 M 以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和仰角 α 开始运动。在图示直角坐标系中的运动方程为：

$$x(t) = v_0 t\cos\alpha$$

$$y(t) = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$



试求质点的 t 时刻切向加速度 a_τ 、法向加速度 a_n 和运动轨迹曲线的曲率。 图 6-18

解：

$$ds=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}dt=\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}\,dt$$

$$v=ds/dt=\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}$$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{-g(v_0\sin\alpha-gt)}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}}=\frac{-g(v_0\sin\alpha-gt)}{v}$$

$$\pm\rho^{-1}=\frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{-g/v_0\,cos\,\alpha}{v_0\,cos\,\alpha}=-\frac{-g/v_0\,cos\,\alpha}{v_0\,cos\,\alpha}=\frac{-g}{(v_0\,cos\,\alpha)^2}<0$$

$$\rho^{-1}=\frac{\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}}{\left[1+\left(\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho=\frac{\left[(v_0)^2-2v_0gt\sin\alpha-g^2t^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v_0g\cos\alpha}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v_0g\cos\alpha\left[(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2\right]}{\left[(v_0)^2-2v_0gt\sin\alpha-g^2t^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{v_0}{v}g\cos\alpha$$

$$a=\sqrt{(a_\tau)^2+(a_n)^2}=\frac{g}{v}\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(v_0\sin\alpha-gt)^2}=g$$

最后得：

$$a_\tau=-\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v}\text{；}\quad a_n=\frac{v_0}{v}g\cos\alpha$$

$$\rho=\frac{\left[(v_0)^2-2v_0gt\sin\alpha-g^2t^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v_0g\cos\alpha}\text{；}$$

$$a = g$$