

第八章 点的合成运动

物体的运动是相对的，对于不同的观察者，其运动规律是不同的，即物体的运动相对与不同的参考系是不同的。如图 8-1 所示沿 ox 轴作纯滚动的圆轮。取轮缘上的 M 点为动点； oxy 、 $cx'y'$ 为参考系（其中 c 为轮心， c 点作直

线运动，运动过程中 $cx' \parallel ox$ ， $cy' \parallel oy$ 。即 $cx'y'$ 相对 oxy 作平动运动）。对于 oxy 参考系而言，动点 M 的运动轨迹曲线为旋轮线；对 $cx'y'$ 参考系而言，动点 M 的运动轨迹曲线为圆周线。在 oxy 、 $cx'y'$ 参考系中的动点运动轨迹曲线的不同则导致动点在两个参考系中的速度矢量和加速度矢量的不同。即动点运动方程 $\mathbf{r}(t)$ 对时间导数的不同。为此首先分析动点运动方程 $\mathbf{r}(t)$ 对时间的导数。

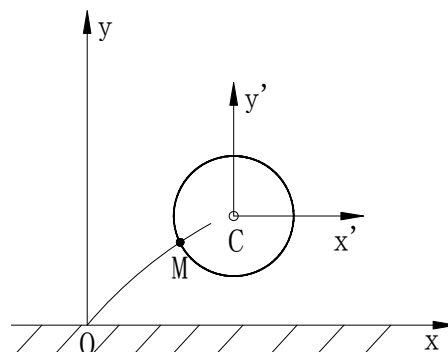


图 8-1

§8-1 绝对时间导数和相对时间导数

在质点的合成运动分析中涉及到两个参考系。由于牛顿第二定律的动力学分析要求，一个参考系必须是惯性参考系，（今后无专门说明，惯性参考系取为地球），称为定参考系。或称为定系；另一参考系相对定参考系运动，称为动参考系。或称为动系。

质点的运动学分析涉及到质点的位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ ；速度矢量 $\mathbf{v}(t)$ ；加速度矢量 $\mathbf{a}(t)$ 。对 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内的这些运动学矢量的增量的分析必须明确是对哪一个参考系而言的。是对定系，还是对动系而言。因为对动系和对定系，质点运动学矢量（位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ ；速度矢量 $\mathbf{v}(t)$ ；加速度矢量 $\mathbf{a}(t)$ ）在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内的增量是不同的。质点的运动学矢量在定系

中的矢量增量标为绝对增量。其对应的时间导数称为绝对（时间）导数；质点的运动学矢量在动系中的矢量增量标称为相对增量。其对应的时间导数标称为相对（时间）导数。

以图 8-2 所示在开有圆槽的矩形板槽内作圆周运动的质点。当矩形板作刚体平动运动（相对惯性参考系 oxy ）时。则质点在定系（ oxy 坐标系）中的增量为：

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

质点在动系（相对矩形板）中的增量为：

$$\Delta \mathbf{r}_r = \mathbf{r}_r(t + \Delta t) - \mathbf{r}_r(t)$$

显然 $\Delta \mathbf{r} \neq \Delta \mathbf{r}_r$

若定义:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

为 \mathbf{A} 矢量(在质点运动学中, \mathbf{A} 可以是位置矢量 \mathbf{r} ; 速度矢量 \mathbf{v} 等运动学矢量)在定系中的绝对(时间)导数。

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}_r(t + \Delta t) - \mathbf{A}_r(t)}{\Delta t}$$

为矢量 \mathbf{A} 在动系中的相对时间导数, 则

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{A}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_r + \dot{\mathbf{r}}_{e0} = \dot{\mathbf{A}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_r + \dot{\mathbf{r}}_{e0} \quad (8-1)$$

证: (只给出平面情况的证明。如图 8-3 所示。)

$$\boldsymbol{\alpha} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\beta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

oxy 为定系; $o'\xi\eta$ 为动系;

$$\theta = \theta(t)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \dot{\theta} = \dot{\theta} \boldsymbol{\beta}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = (-\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \boldsymbol{\alpha}$$

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{A}_r}{dt} \Big|_{\neq} = \frac{d}{dt} (A_\xi \boldsymbol{\alpha} + A_\eta \boldsymbol{\beta})$$

$$= \dot{A}_\xi \boldsymbol{\alpha} + \dot{A}_\eta \boldsymbol{\beta} + A_\xi \dot{\boldsymbol{\alpha}} + A_\eta \dot{\boldsymbol{\beta}}$$

$$= \dot{\mathbf{A}}_r + (A_\xi \boldsymbol{\beta} - A_\eta \boldsymbol{\alpha}) \dot{\theta}$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{k}$$

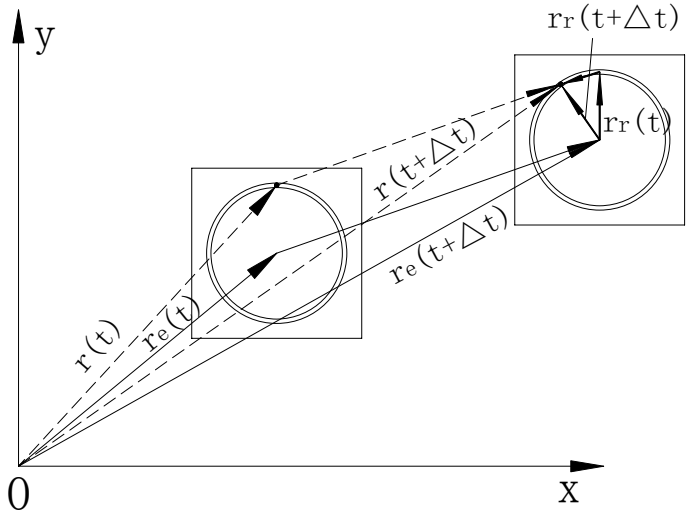


图 8-2

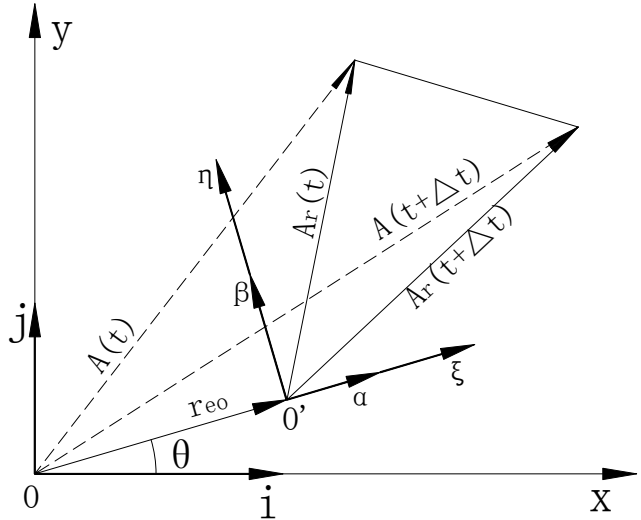


图 8-3

$$\therefore \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_r = \dot{\theta} \mathbf{k} \times (A_\xi \boldsymbol{\alpha} + A_\eta \boldsymbol{\beta}) = (A_\xi \boldsymbol{\beta} - A_\eta \boldsymbol{\alpha}) \dot{\theta}$$

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{A}}_r}{dt} \right|_{\text{转}} = \dot{\mathbf{A}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_r$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{A}}_r}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{A}_r + \mathbf{r}_{e0}) = \dot{\mathbf{A}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}_r + \dot{\mathbf{r}}_{e0}$$

§8-2 相对运动、牵连运动、绝对运动

对质点的合成运动分析，在理论上如果已知了质点相对定系（或动系）的运动方程和定系与动系之间的运动方程来确定动系中动点的运动量（速度矢量、加速度矢量），在数学上是很容易处理的。对实际问题的处理时，通常并不需要直接确定动点的运动方程，而只是确定任意给定时刻的各运动量之间在不同参考系中的表示之间的关系。这种动点相对不同参考系中表示之间的相关分析就是**动点的合成运动分析**。

对所选定的定参考系和动参考系，动点的运动分别依据其相对的参考系分为绝对运动和相对运动。

绝对运动：动点相对定参考系的运动称为绝对运动。绝对运动对应的运动方程（矢量表示），速度矢量，加速度矢量分别记为 $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(t)$ ； $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a(t)$ ； $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_a(t)$ 。

相对运动：动点相对动参考系的运动称为相对运动。相对运动对应的运动方程（矢量表示），速度矢量，加速度矢量分别记为 $\mathbf{r}_r = \mathbf{r}_r(t)$ ； $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r(t)$ ； $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r(t)$ 。

在动点的合成运动分析中，除动点的相对运动和绝对运动外，定系和动系之间也存在相对运动。动系相对定系的运动本质上是固连在动系上给定的坐标系相对固连在定系上的坐标系之间的坐标变换。且对不同时刻 t 所对应的坐标变换一般是不同的，即依赖于时间参数的坐标变换。将动系取为运动的刚体，则动系相对定系的运动就是运动刚体相对惯性参考系为定系的刚体运动。在刚体相对定系运动过程中，刚体上的每一点相对定系都在运动（包括相对定系的静止）。在动点的合成运动分析中，动系中与动点重合的点的运动（即运动刚体上与动点占有同一几何空间位置的刚体上的点的运动）起着重要的作用。动系中与动点重合的点，在动点的合成运动分析中称为**牵连点**。牵连点相对定系的运动称为牵连运动。

牵连运动：动系上与动点占有相同几何空间位置的点相对定参考系的运动称为牵连运动。牵连运动对应的运动方程（矢量表示），速度矢量，加速度矢量分别记为 $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_e(t)$ ；

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e(t)；\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_e(t)。$$

绝对运动，相对运动（对动点而言）和牵连运动（对牵连点而言）都是对质点而言。

其 \mathbf{r}_a 、 \mathbf{v}_a 、 \mathbf{a}_a ； \mathbf{r}_r 、 \mathbf{v}_r 、 \mathbf{a}_r ； \mathbf{r}_e 、 \mathbf{v}_e 、 \mathbf{a}_e 分别称为绝对位置矢量、绝对速度矢量、绝对加速度矢量；相对位置矢量、相对速度矢量、相对加速度矢量；牵连位置矢量、牵连速度矢量、牵连加速度矢量。绝对运动、相对运动和牵连运动各自对应的加速度矢量是速度矢量对时间参数的导数；速度矢量是位置矢量对时间参数的导数。

例 8-1 如图 8-4 所示。大圆环绕过 O 点垂直纸面的轴作定轴转动运动。大圆环上的小环在大圆环上相对大圆环运动。试分析当小环作为动点时的合成运动分析。

解：

在 $t=0$ 时：

定系： oxy 或 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

动系： $o'x'y'$ 或 $\{0'; \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$

$$\mathbf{r}_a = -2R\mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_e = -2R\mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_r = -R\mathbf{i}'$$

在 t 时：

定系： oxy 或 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

动系： $o''x''y''$ 或 $\{0''; \mathbf{i}'', \mathbf{j}''\}$

$$\mathbf{r}_a = -[R \cos \theta_e + R \cos(\theta_e + \theta_r)]\mathbf{i} + [R \sin \theta_e + R \sin(\theta_e + \theta_r)]\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_e = -[R \cos \theta_e + R \cos(\theta_e + \theta_r)]\mathbf{i} + [R \sin \theta_e + R \sin(\theta_e + \theta_r)]\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_r = -R \cos \theta_r \mathbf{i}'' + R \sin \theta_r \mathbf{j}''$$

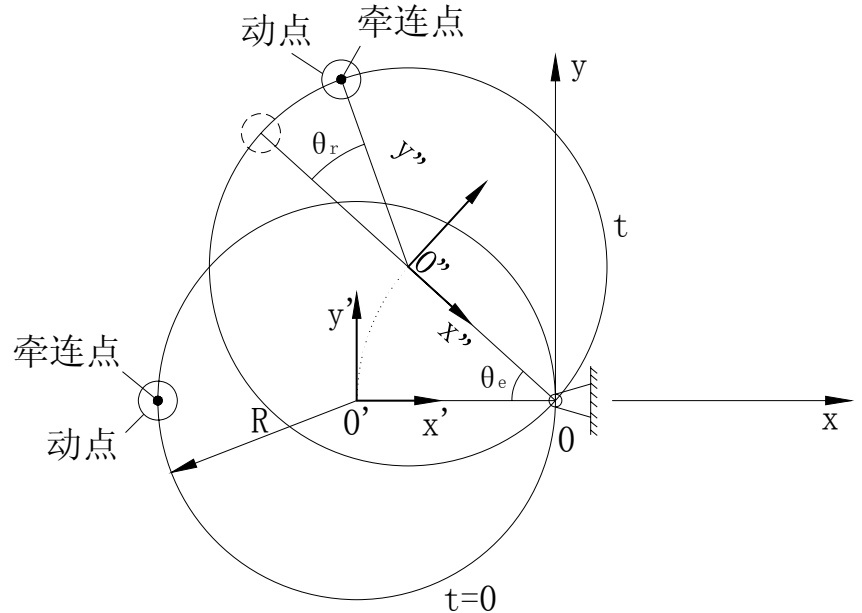


图 8-4

§ 8-3 动点合成运动速度合成定理

当给定定系和动系后，动点的合成运动分析中，动点的绝对速度矢量 \mathbf{v}_a 、相对速度矢量 \mathbf{v}_r 及牵连点的牵连速度矢量 \mathbf{v}_e 之间的关系由速度合成定理确定。

定理：在给定的定系和动系中，动点的绝对速度矢量 \mathbf{v}_a 、相对速度矢量 \mathbf{v}_r 及牵连点的

牵连速度矢量 \mathbf{v}_e 满足：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (8-2)$$

证明：

如图 8-5 所示。o 点为定系中的固定点。动系 $o'x'y'$ 相对定系的运动为动系由(1) o 至 o' 的平动运动；(2) 在绕过 o' 点与 $o'x'y'$ 面正交的转动轴的转动运动（在该 t 时刻可视为是定轴转动）。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}_{e0} + \mathbf{r}_r \\ \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_{e0}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_r}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{r}_{e0}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r \\ \mathbf{v}_a &= \mathbf{v}_{e0} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r \end{aligned}$$

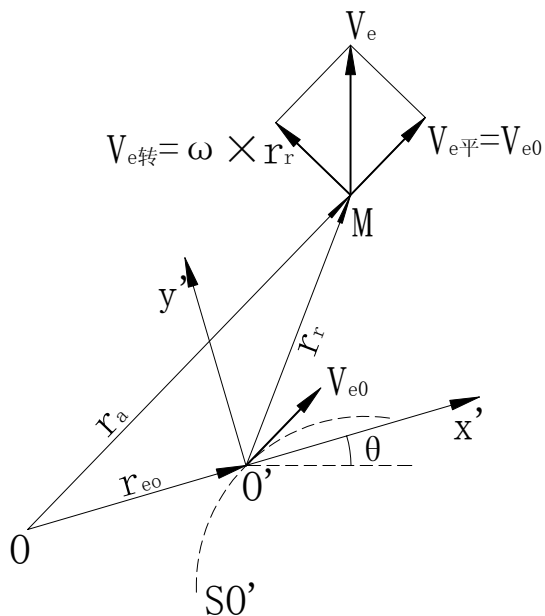


图 8-5

由图 8-5 中可知牵连点（与动点 M 占具同一几何空间位置 \mathbf{r}_a 的动系上的点）的速度

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{e0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r$$

最后得：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

例 8-2：如图 8-6 所示矩形板。板上开有半径为 r 的圆形槽，槽内一小球（视为质点）相对矩形板作匀速运动，其速度大小为 v 。试求图示位置时：

1. 当矩形板在水平面内作刚体平动运动（ o_1 点作以 o 点为圆心的匀速圆周运动，其速度在大小为 V ），槽内小球的绝对速度矢量 $\mathbf{v}_a = ?$

2. 当矩形板在水平面内绕过 o 点

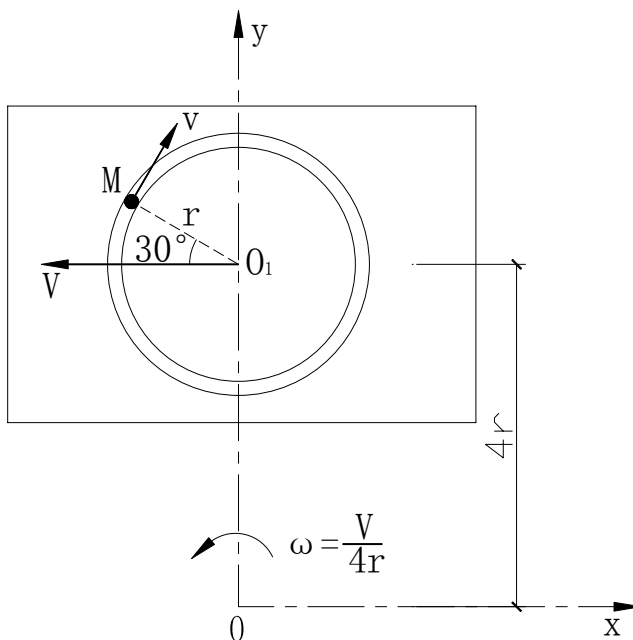


图 8-6 (a)

垂直于 oxy 面内的转动轴作定轴转动运动时 ($\omega = V/4r$) 时, 槽内小球的绝对速度矢量

$$\mathbf{v}_a = ?$$

解:

1. 动系取平动运动的矩形板;
动点取槽内运动的小球;
牵连点为与小球重合的矩形板上的点。

在动点位置处画出 \mathbf{v}_a 、 \mathbf{v}_r 、 \mathbf{v}_e 的速度分析图。

如图 8-6 (b) 所示。

建立 Mxy 坐标系, 应用速度合成定理求解得:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a &= (v \cos 60^\circ - V)\mathbf{i} + v \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= \left(\frac{1}{2}v - V\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v \mathbf{j} \\ v_a &= \sqrt{v^2 + V^2 - vV} \end{aligned}$$

2. 动系取为定轴转动运动矩板;
动点取为槽内运动的小球;
牵连点为与小球重合的矩形板上点;

在动点位置处画出 \mathbf{v}_a 、 \mathbf{v}_r 、 \mathbf{v}_e 的速度分析图。如图 8-6

(c) 所示。

建立 Mxy 坐标系, 应用速度合成定理求解得:

$$\mathbf{v}_a = (v \cos 60^\circ - v_e \cos \varphi)\mathbf{i} + (v \cos 30^\circ - v_e \sin \varphi)\mathbf{j}$$

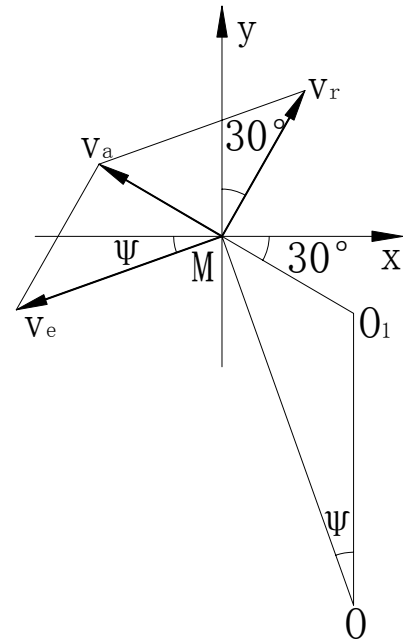
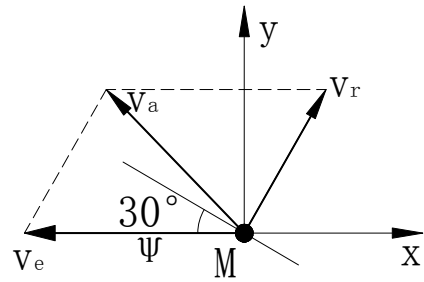
图 8-6 (b) (c)

$$(oM)^2 = r^2 + (4r)^2 - 2r(4r) \cos 120^\circ$$

$$= r^2 + 16r^2 + 4r^2 = 21r^2$$

$$v_e = (oM) \omega = \sqrt{21} V/4$$

$$\frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{21} r}; \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{7}}{14}; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{189}}{14}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_a &= \left[\frac{1}{2}v - (\sqrt{21}V/4)\sqrt{189}/14 \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}v - (\sqrt{21}V/4)\sqrt{7}/14 \right] \mathbf{j} \\
&= \left(\frac{1}{2}v - \frac{9}{8}V \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{8}V \right) \mathbf{j} \\
v_a &= \frac{1}{4} \sqrt{13V^2 + 21V^2 - 24vV}
\end{aligned}$$

例 8-3: 如图 8-7 所示。刚体以角速度 ω (常数) 绕垂直于 oxy 面过 O 点的转动轴作定轴转动运动。若动点 M 相对动系, $ox'y'$ 的运动方程为

$$x' = A(1 - \cos \omega t)$$

$$y' = A \sin \omega t$$

试求动点 M 的绝对轨迹方程。

解:

绝对运动轨迹方程的表达形式取决于定系中的坐标系的选取 (绝对运动轨迹不变, 但绝对运动轨迹在坐标系中的坐标表示随坐标系的不同选择而变)。在图 8-7 示 oxy 定参考系和 $ox'y'$ 动参考系中 \mathbf{r}_a 和 \mathbf{r}_r 是同一位置矢量。为了更清楚地看出相对运动和绝对运动的关系, 将定参考系上的坐标系作一平移, 使得 O 点和 O' 不重合 (如图)。在分析结果中取 $\mathbf{r}_{e0} = 0$ 就得到 O 点和 O' 点重合的结果。

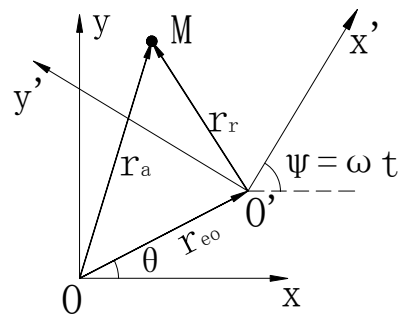
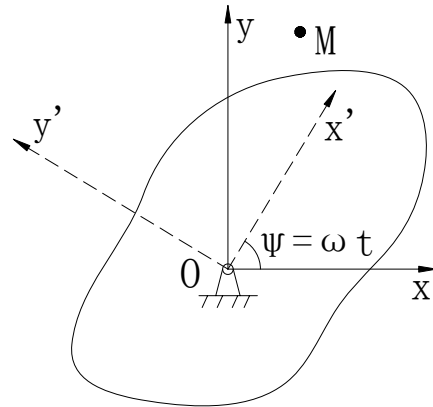


图 8-7

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_{e0}$$

$$\mathbf{r}_r = A(1 - \cos \omega t) \mathbf{i}' + A \sin \omega t \mathbf{j}'$$

$$\mathbf{r}_{e0} = r_{e0} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{i}' = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{r}_a = A(1 - \cos \omega t) (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j})$$

$$+ A \sin \omega t (-\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}) + r_{e0} (\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$$

当 $r_{e0} = 0$ 时 ($r_{e0} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{r}_a = A(\cos \omega t - 1) \mathbf{i} + A \sin \omega t \mathbf{j}$$

$$\begin{cases} x_a = A(\cos \omega t - 1) \\ y_a = A \sin \omega t \end{cases}$$

$$(x_a + A)^2 + (y_a)^2 = A^2$$

例 8-4: 如图 8-8 (a) 所示机构中, 已知曲柄 $OA = r$, 曲柄绕垂直与 oxy 面过 O 点的转动轴以角速度 ω 作定轴转动运动。试求当 OA 杆与水平线成 φ 角时 BC 杆的速度 $v_{BC} = ?$

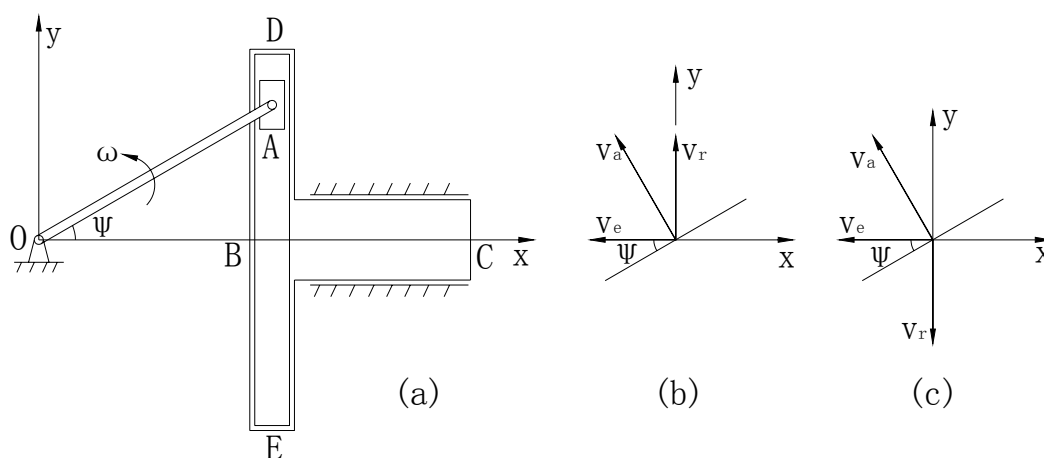


图 8-8

解:

机构由可视为质点的滑块 A ; 绕过点 O 垂直于 oxy 面转动轴作刚体定轴转动的曲柄 OA ; 沿水平方向作刚体平动运动的 BC 杆组成。可作为动系的刚体是曲柄 OA 和 BC 杆。以下分别以 BC 杆作为动系、 OA 曲柄作为动系进行分析, 以确定 v_{BC} 。

1. 动系取为作刚体平动运动的 BC 杆;
动点取为滑块 A (或 OA 曲柄上的 A 点);
牵连点为与滑块 A 重合的 BC 杆上的点。

在动点处画出 \mathbf{v}_a 、 \mathbf{v}_r 、 \mathbf{v}_e 的速度分析图。见图 8-8 (b)。

建立 Axy 坐标系, 应用速度合成定理求解得:

$$\begin{cases} v_{ax} = v_{rx} + v_{ex} \\ v_{ay} = v_{ry} + v_{ey} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v_a \sin \varphi = -v_e \\ v_a \cos \varphi = v_r \end{cases}$$

$$\therefore v_a = r \omega$$

$$\therefore v_e = r \omega \sin \varphi \quad ; \quad v_r = r \omega \cos \varphi$$

由于 BC 杆作刚体平动运动, BC 杆上各点处的速度与牵连点处的速度相同。最后得:

$$v_{BC} = v_a = r \omega \sin \varphi$$

2. 动系取为绕过点 O 垂直于 oxy 面转动轴作刚体定轴转动运动的曲柄 OA ;
 动点取为 BC 杆上与滑块 A 重合的点;
 牵连点为滑块 A (或 OA 曲柄上的 A 点)。

在动点处画出 v_a 、 v_r 、 v_e 的速度分析图。见图 8-8 (c)。

建立 Axy 坐标系, 应用速度合成定理求解得:

$$\begin{cases} v_{ax} = v_{rx} + v_{ex} \\ v_{ay} = v_{ry} + v_{ey} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v_a = -v_e \sin \varphi \\ 0 = v_e \cos \varphi - v_r \end{cases}$$

$$\therefore v_e = r \omega$$

$$\therefore v_a = r \omega \sin \varphi \quad ; \quad v_r = r \omega \cos \varphi$$

由于 BC 杆作刚体平动运动, BC 杆上各点处的速度与动点处的速度相同。最后得:

$$v_{BC} = v_a = r \omega \sin \varphi$$

在该例中, 由于动系的选取不同, v_{BC} 分别对应着 v_e 、 v_a 。同样两种情况的 v_r 分别是相对其对应的动系而言的, 因此第一种情况 v_r 是向上; 第二种情况 v_r 是向下。

例 8-5: 如图 8-9 所示。已知半圆柱凸轮半径为 r , 在图 8-9 所示 $\varphi = 30^\circ$ 位置时, 向左以速度 u 运动, 并推动杆 OA 绕过 O 点垂直于 oxy 面的转动轴作刚体定轴转动运动。试求该瞬时 OA 杆绕转动轴转动的角速度 $\omega_{oA} = ?$

解:

本例中涉及半圆柱凸轮和作定轴转动的杆。凸轮水平向左的刚体平动通过凸轮与杆在 B 点的接触传递运动。且接触点 (无论是凸轮上还是杆上) 在不同的时刻对应着不同的点。即接触点随时间而变。为了选取相对运动为简单 (直线或圆周运动) 运动的动点, 考虑图

8-9 (b) 所示机构。在该机构中若将滑块 (或半圆柱凸轮上的 B 点) 作为动点, AB 杆作为动系, 由于动点在半圆柱凸轮上的位置固定, 因此动点的相对运动是沿 AB 杆内滑槽的直线运动。对于图 8-9 (a) 而言, 若将动点取为半圆柱凸轮与杆的接触处的 B 点上, 由于半圆柱凸轮上 B 点的位置随时间的变化而取的相对运动不在是直线运动。即对于动点随时间的不同而不断变化时, 其相对运动一般情况下都不是简单的直线运动或圆周运动。因此在点的合成运动分析中, 动点的选取要求其不应当随时间的不同而变化。在本例中接触点 B 不满足这一要求《这一要求并不是说随时间变化的接触点 B 不能作为动点, 而是因为将接触点 B 作为动点, 其相对运动通常都是比较复杂的运动。对点的合成运动分析而言, 总是希望相对运动为直线运动或圆周运动》。同时若取半圆柱凸轮作为动系, AB 杆上的点, 除 O 点不动外《O 点不能作为动点》, 其它各点的相对运动都不是直线运动或圆周运动。因此, 动系只能取作定轴转动的 OA 杆。动点只能取半圆柱凸轮上的点。半圆柱凸轮上 C 点在运动过程中则始终保持到 OA 杆的距离不变。即半圆柱凸轮上的 C 点的相对运动是直线运动。因此动点选为半圆柱凸轮上的 C 点。

动系取为绕过 O 点垂直于 oxy 面转动轴作定轴转动运动的 OA 杆;
 动点取为作刚体平动运动的半圆柱凸轮上的 C 点;
 牵连点取为 OA 杆上与圆柱凸轮上 C 点重合的点;

在动点处画出 v_a 、 v_r 、 v_e 的速度分析图。见图 8-9 (c);

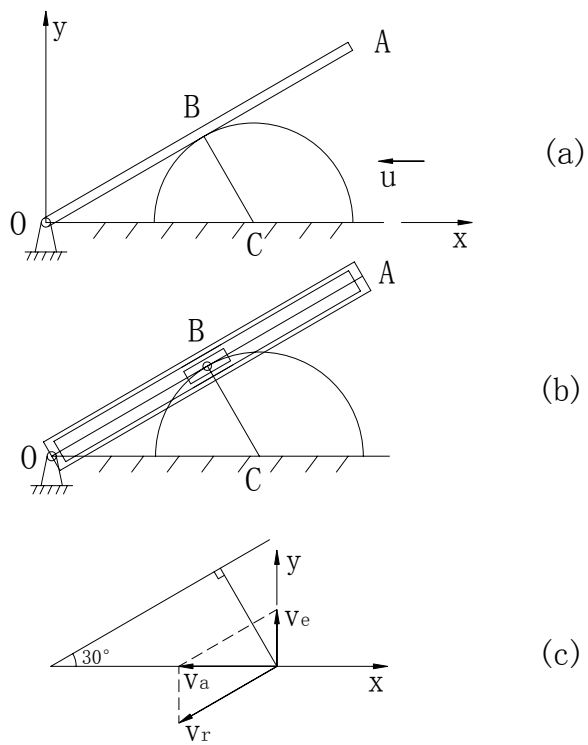


图 8-9

因此, 动系只能取作定轴转动的 OA 杆。动点只能取半圆柱凸轮上的点。半圆柱凸轮上 C 点在运动过程中则始终保持到 OA 杆的距离不变。即半圆柱凸轮上的 C 点的相对运动是直线运动。因此动点选为半圆柱凸轮上的 C 点。

- 动系取为绕过 O 点垂直于 oxy 面转动轴作定轴转动运动的 OA 杆;
- 动点取为作刚体平动运动的半圆柱凸轮上的 C 点;
- 牵连点取为 OA 杆上与圆柱凸轮上 C 点重合的点;

在动点处画出 v_a 、 v_r 、 v_e 的速度分析图。见图 8-9 (c);

$$\begin{cases} v_{ax} = v_{rx} + v_{ex} \\ v_{ay} = v_{ry} + v_{ey} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u = -v_r \cos 30^\circ \\ 0 = v_e - v_r \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$u = \sqrt{3}v_e = 2\sqrt{3}rw_{0A}$$

$$w_{0A} = \frac{\sqrt{3}u}{6r}$$

§ 8-4 动点合成运动加速度合成定理

在动点的速度合成定理中，一旦定系、动系、动点，牵连点确定，则动点的绝对速度矢量 \mathbf{v}_a ；相对速度矢量 \mathbf{v}_r ；牵连点的牵连速度矢量 \mathbf{v}_e 之间满足 (8-2) 式。对动点的合成运动中的加速度分析，定动系作刚体平动运动和刚体作定轴转动运动时，动点的绝对加速度矢量 \mathbf{a}_a ；动点的相对加速度矢量 \mathbf{a}_r ；牵连点的牵连加速度矢量 \mathbf{a}_e 之间的关系将不同。

尤其是动系作刚体定轴转动运动时，还将产生附加的科氏加速度矢量 \mathbf{a}_c 。因此在点的合成运动加速度分析时，这是给出牵连运动为平动运动和牵连运动为定轴转动两种情况下加速运动合成定理。

一、牵连运动为刚体平动运动时动点的加速度合成定理

当给定定系和刚体平动运动的动系后，在动点的合成运动中，动点的绝对加速度矢量 \mathbf{a}_a ，相对加速度矢量 \mathbf{a}_r 及牵连点的牵连加速度矢量 \mathbf{a}_e 之间的关系由牵连运动为刚体平动运动加速度合成定理确定。

定理：在给定的定系和作刚体平动运动的动系中，动点的绝对加速度矢量 \mathbf{a}_a 、相对加速度矢量 \mathbf{a}_r 及牵连点的牵连加速度矢量 \mathbf{a}_e 之间满足

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e \quad (8-3)$$

证明：(见图 8-10)

$$\because \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r + \mathbf{v}_r$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{e0}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_r}{dt}$$

$$= \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

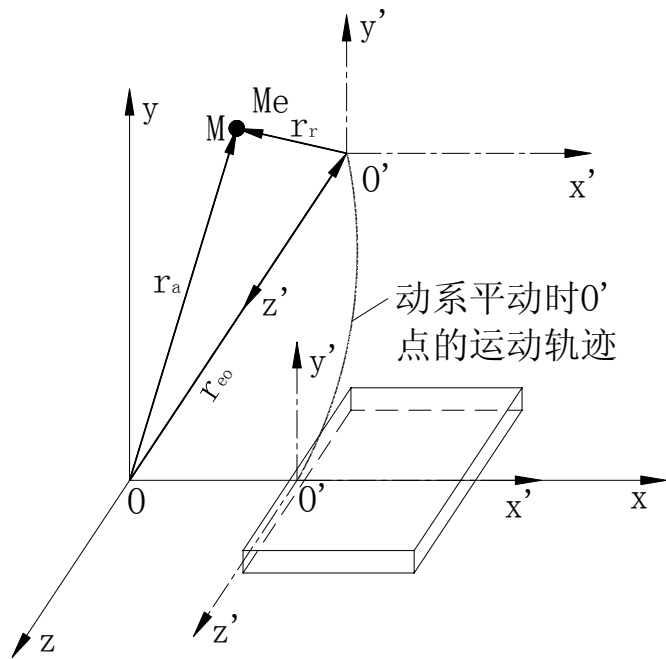


图 8-10

例 8-6 如图 8-11 所示圆柱凸轮。凸轮在水
平面内向右作减速运动。若已知凸轮在半径为 R 。试求图 8-11 所示瞬时，当凸轮的速度矢量为 \mathbf{u} ，加速度矢量为 \mathbf{a} 时，导杆 AB 的速度矢量 \mathbf{v}_{AB} =? 加速度矢量 \mathbf{a}_{AB} =?
解：

动系取为作刚体平动运动的凸轮；
 动点取为作刚体平动运动的导杆上的 A 点；
 牵连点取为与动点重合的凸轮上的 A 点；

在动点处画出 v_a 、 v_r 、 v_e 和 a_a 、 a_r 、 a_e

速度和加速度分析图。见图 8-11 (b)、(c)；

建立 Axy 坐标系，应用速度和加速度合成定理求解得：

$$\begin{cases} v_{ax} = v_{ex} + v_{rx} \\ v_{ay} = v_{ey} + v_{ry} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = v - v_r \cos 60^\circ \\ v_a = v_r \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$v_a = \sqrt{3}u; \quad v_r = 2u$$

$$\begin{cases} a_{ax} = a_{rx} + a_{ex} = a_{rnx} + a_{r\tau x} + a_{ex} \\ a_y = a_{ry} + a_{ey} = a_{rmy} + a_{r\tau y} + a_{ey} \end{cases}$$

$$-a_a \cos 60^\circ = -a_e \cos 30^\circ - a_{rn}$$

$$-\frac{1}{2}a_a = -\frac{\sqrt{3}}{2}a - (v_r)^2 / R$$

$$\frac{1}{2}a_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a + 4u^2 / R$$

$$a_a = \sqrt{3}a + 8u^2 / R$$

二、牵连运动为刚体定轴转动运动时动点的加速度合成定理

当给定定系和刚体定轴转动运动的动系后，在动点的合成运动中，动点除相对定系的绝对加速度矢量 a_a ；相对动系的相对加速度矢量 a_r 及牵连点的牵连加速度矢量 a_e 外。由于动系的转动将会产生附加的加速度矢量 a_c 。且称由动系的转动运动所产生的附加加速度矢量 a_c 为科氏加速度矢量。对动系作定轴转动运动时，在动点的合成运动中，动点的绝对加速度矢量 a_a ；相对加速度矢量 a_r ；牵连点的牵连加速度矢量 a_e 及由动系转动而产生的

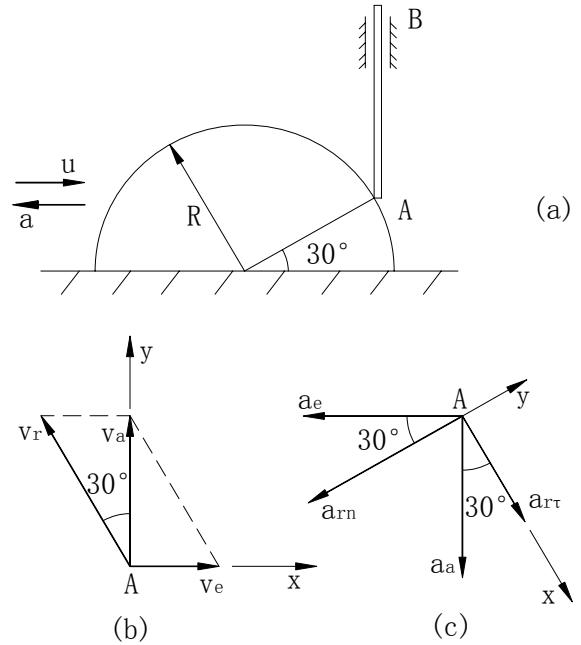


图 8-11

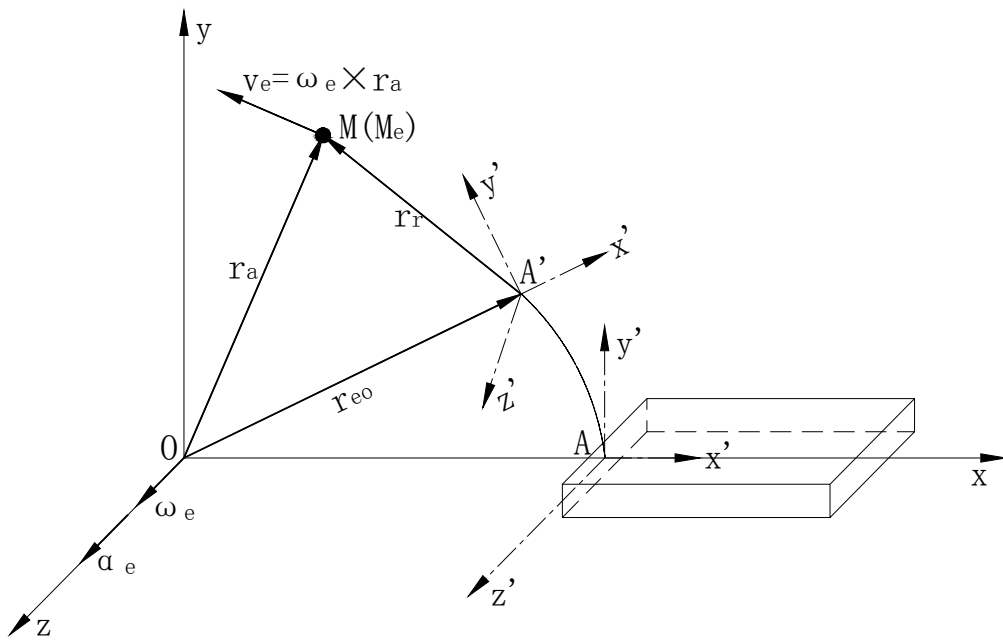
附加加速度矢量 \mathbf{a}_c 之间的关系，由牵连运动为定轴转动运动加速度合成定理确定。

定理：在给定的定系和作刚体定轴转动运动的动系中，动点的绝对加速度矢量 \mathbf{a}_a ；相对加速度矢量 \mathbf{a}_r ；牵连点的加速度矢量 \mathbf{a}_e 及科氏加速度矢量 \mathbf{a}_c 之间满足：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \quad (8-4)$$

$$\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \quad (8-5)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_e$ 为动系作定轴转动时的角速度矢量； \mathbf{v}_r 为动点相对动系的相对速度矢量。



证明：（见图 8-12）

为几何示意图的直观。取动系的转动轴为图 8-12 中 $oxyz$ 坐标系《 $oxyz$ 的坐标系的建立并不是必须的。这里仅为几何示意的直观性而建立。以下证明中用矢量形式给出，整个证明过程中并未涉及到 $oxyz$ 坐标系的 Z 轴，在动系上建立 $Ax'y'z'$ 动坐标系。由于动系绕 Z 轴作定轴转动运动； A 点的运动为圆周运动（ AA' 为一段圆弧）。由速度合成定理：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_a + \mathbf{v}_r$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_a) + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} + \mathbf{a}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \mathbf{a}_e \times \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_a + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \mathbf{a}_e \times \mathbf{r}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r) + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \mathbf{a}_e \times \mathbf{r}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_e + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_e) + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \\
&= \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \\
&= \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c
\end{aligned}$$

例 8-7: 如图 8-13 所示。绳索与惯性参考系相连, 悬拉一质点 M (质点 M 相对惯性参考系, 处于静止状态)。一刚体绕过 O 点的转动轴作定轴转动运动, 且角加速度 $\alpha = 0$ 。试求质点 M 相对定轴转动运动刚体的相对加速度。

解:

动点取为质点 M ;

动系取为作定轴转动运动的刚体;

牵连点取为与动点 M 重合的定轴转动运动刚体上的点;

动点处的加速度分析如图 8-13 所示;

由点的加速度合成定理求解得:

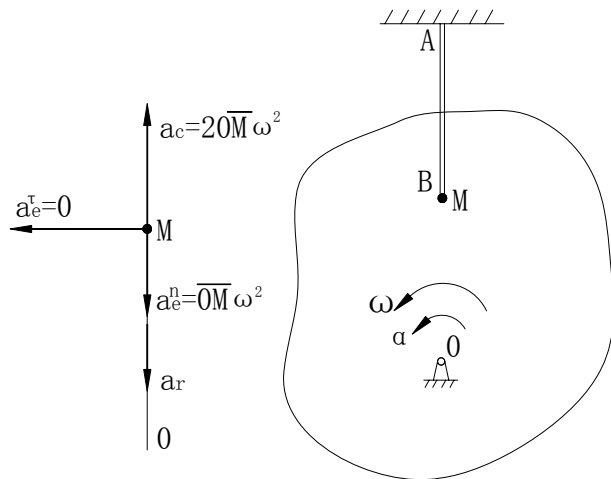


图 8-13

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$$

$$\because \mathbf{a} = 0$$

$$\therefore \mathbf{a}_r = -(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c)$$

$$a_r = a_c - a_e = 2\overline{OM} \omega^2 - \overline{OM} \omega^2 = \overline{OB} \omega^2 \quad (\text{指向下})$$

例 8-8: 如图 8-14 所示机构中, O_1A 杆以均角速度 ω 作定轴转动运动。图示位置时 $\angle AO_2O_1 = 30^\circ$, $\angle AO_1O_2 = 90^\circ$, O_1A 杆长为 L 。试求该位

置时 O_2B 杆的角速度 $\omega_{O_2B} = ?$ $\alpha_{O_2B} = ?$

解:

该机构中 O_1A 杆和 O_2B 杆都作刚体定轴转动运动。若取 O_1A 杆为动系, 则滑块 A 相对 O_1A 杆无相对运动。因此在点的合成运动分析中, 以 O_1A 杆为动系时, 滑块 A 不能取为动点。动点只能取在 O_2B 刚体上。 O_2B 刚体上 O_2 点相对 O_1A 杆的相对运动为圆周运动 (在 O_1A 运动过程中, O_2 与 O_1 点的距离保持不变)。但 O_2 点的绝对运动状态是相对定系静止。因此以 O_2 为动点时无法显示 O_2B 杆的运动量。即 O_2 点也不能作为动点。 O_2B 杆上其它异于 O_2 的点相对 O_1A 杆的运动都是比圆周运动复杂的运动。以上分析表明 O_1A 杆作为动系时, 不适于点的合成运动分析。

动系取为绕 O_2 点作定轴转动运动的 O_2B ;

动点取为滑块 (视为质点) A ;

牵连点为与滑块 A 重合的 O_2B 杆上的点;

在动点处画出速度分析图。见图 8-14 (b);

在动点处画出加速度分析图。见图 8-14 (c);

在速度和加速度分析图中建立 Axy 坐标系;

1. 速度合成定理求解: 图 8-14 (b)

$$\begin{cases} v_{ax} = v_{rx} + v_{ex} \\ v_{ay} = v_{ry} + v_{ey} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v_a = -v_r \cos 30^\circ - v_e \cos 60^\circ \\ 0 = -v_r \cos 60^\circ + v_e \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\therefore v_a = L \omega; \quad v_e = 2L \omega_{O_2B}$$

$$\therefore \omega_{O_2B} = \frac{1}{4} \omega; \quad v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} L \omega$$

2. 加速度合成定理求解: 图 8-14 (c)

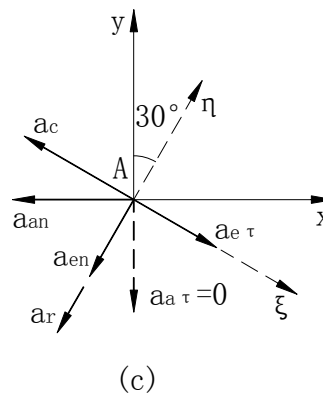
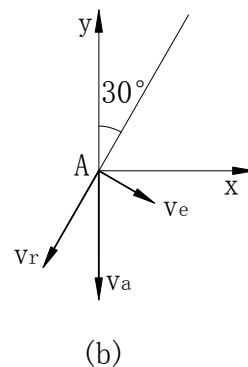
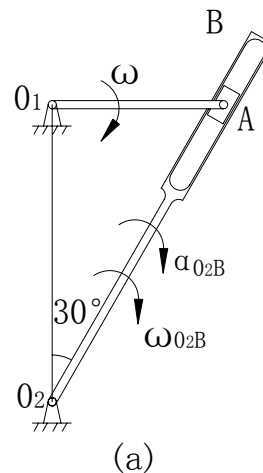


图 8-14

$$\begin{cases} a_{ax} = a_{rx} + a_{ex} + a_{cx} \\ a_{ay} = a_{ry} + a_{er} + a_{cy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_{an} = -a_c \cos 30^\circ - a_r \cos 60^\circ - a_{en} \cos 60^\circ + a_{e\tau} \cos 30^\circ \\ 0 = a_c \cos 60^\circ - a_r \cos 30^\circ - a_{en} \cos 30^\circ + a_{e\tau} \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\therefore a_{an} = L \omega^2;$$

$$a_c = 2 \omega_{O_2B} v_r = \frac{\sqrt{3}}{4} L \omega^2;$$

$$\begin{aligned} a_{an} &= 2L(\omega_{O_2B})^2 \\ &= \frac{1}{8} L \omega^2; \end{aligned}$$

$$a_{e\tau} = 2L\alpha_{O_2B}$$

$$\therefore \alpha_{O_2B} = -\frac{\sqrt{3}}{8} L \omega^2;$$

$$a_r = \frac{3}{8} L \omega^2$$

在该例题的分析求解过程中可以看到，对牵连运动是定轴转动运动点的合成运动分析中，应当注意以下几点：

- (1) 选择动系时应当使得动点的相对运动明确、清楚；
- (2) 由于在确定科氏加速度矢量 \mathbf{a}_c 时，必须知道 \mathbf{v}_r 。因此应当首先进行速度分析；
- (3) 在建立动点处坐标系时，坐标系的选择将会影响求解的繁简。如本例中，若选取图 c 中的 $A\xi\eta$ 坐标系，则由 ξ 轴上的加速度合成定理投影方程：

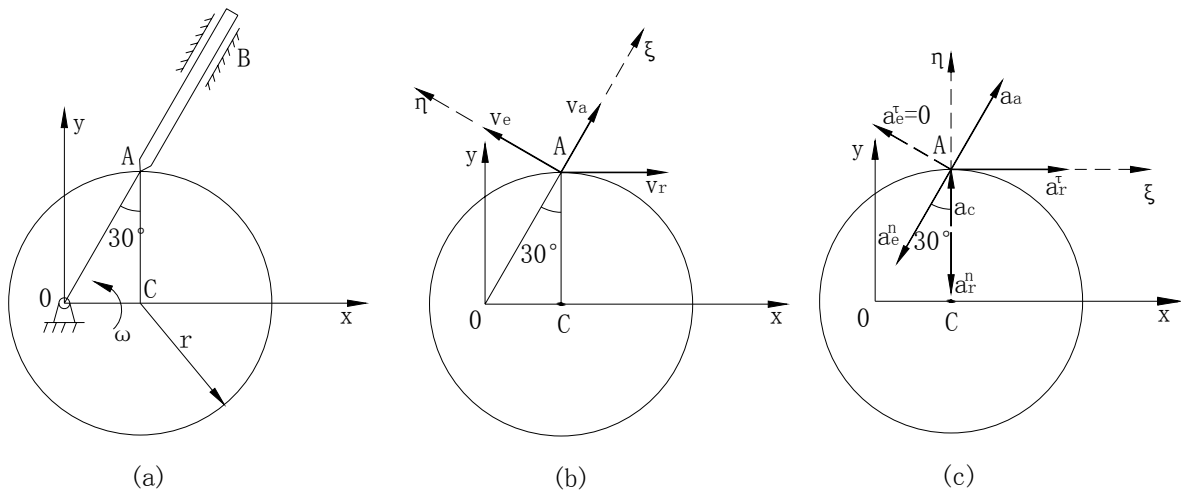
$$a_{a\xi} = a_{r\xi} + a_{e\xi} + a_{c\xi}$$

得容易写：

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} L \omega^2 = 2L\alpha_{O_2B} - \frac{\sqrt{3}}{4} L \omega^2$$

$$\alpha_{O_2B} = -\frac{\sqrt{3}}{8} L \omega^2$$

例 8-9: 如图 8-15 所示。偏心距 $oc = e$ 的半径为 r 的偏心凸轮带动杆 AB 运动。若凸轮以匀角速度 ω 绕过 O 点垂直于 oxy 面作定轴转动运动。试求图 8-15 (a) 所示位置时 AB 杆的加速度 $a_{AB}=?$



解:

动系取为作定轴转动运动的凸轮;
 动点取为平动运动的 AB 杆上 A 点;
 牵连点为凸轮上与 AB 杆上 AB 重合点;
 在动点处画出速度分析图。见图 8-15 (b);
 在动点处画出加速度分析图。见图 8-15(c);
 在速度和加速度分析图建立 $A\xi\eta$ 坐标系。

1. 速度合成定理求解, 见图 8-15 (b)

$$\begin{cases} v_{a\xi} = v_{r\xi} + v_{e\xi} \\ v_{a\eta} = v_{r\eta} + v_{e\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = v_r \cos 60^\circ \\ 0 = v_e - v_r \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\therefore v_e = OA \omega = \frac{2}{3} \sqrt{3} \omega r$$

$$\therefore v_r = \frac{4}{3} r \omega; \quad v_a = \frac{2}{3} r \omega$$

《本例中只要求求 AB 杆的加速度。由于动系选取定轴转动的凸轮, 加速度计算时必须先确定科氏加速度。因此必须先通过速度分析求出相

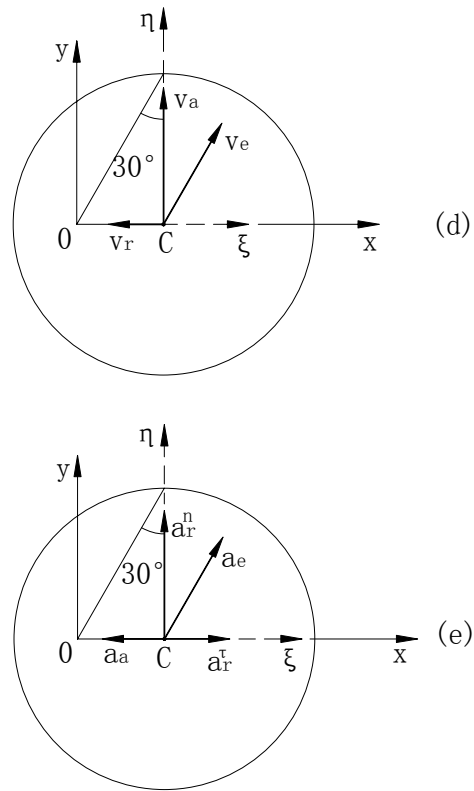


图 8-15

对速度 \mathbf{v}_r 》

2. 加速度合成定理求解。见图 8-15 (c)

$$\begin{cases} a_{a\xi} = a_{r\xi} + a_{e\xi} + a_{c\xi} \\ a_{a\eta} = a_{r\eta} + a_{e\eta} + a_{c\eta} \end{cases}$$

由 η 轴上的投影方程得:

$$a_a \cos 30^\circ = a_c - a_r^n - a_e^n \cos 30^\circ$$

$$\therefore a_c = 2 \omega v_r = \frac{8}{3} r \omega^2$$

$$a_r^n = (v_r)^2 / r = \frac{16}{9} r \omega^2$$

$$a_e^n = OA \omega^2 = \frac{2}{3} \sqrt{3} r \omega^2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} a_a = \frac{8}{3} r \omega^2 - \frac{16}{9} r \omega^2 - r \omega^2$$

$$a_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{9} - 1 \right) r \omega^2 = -\frac{2}{27} \sqrt{3} r \omega^2$$

由于 a_{AB} 杆作刚体平动运动, 最后得:

$$a_{AB} = a_a = -\frac{2\sqrt{3}}{27} r \omega^2$$

本例的上述求解过程中, 动系取为作定轴转动运动的凸轮。因此加速度分析中必须计算科氏加速度 \mathbf{a}_c 。对于本例, 动系也可以取为作刚体平动运动的 AB 杆, 动点取为凸轮上的圆心 c 。且动点的相对运动为以 AB 杆上 B 点为圆心的圆周运动。其速度和加速度分析如图 8-15 (d) (e) 所示。且

$$\begin{cases} v_{a\xi} = v_{r\xi} + v_{e\xi} \\ v_{a\eta} = v_{r\eta} + v_{e\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = v_r + \frac{1}{2} v_e \\ \frac{r}{\sqrt{3}} \omega = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_e \end{cases}$$

$$v_r = \frac{1}{3} r \omega$$

$$\begin{cases} a_{a\xi} = a_{r\xi} + a_{e\xi} \\ a_{a\eta} = a_{r\eta} + a_{e\xi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_a = \frac{1}{2}a_e + a_r^t \\ 0 = \frac{(v_r)^2}{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_e \end{cases}$$

$$a_e = -\frac{2\sqrt{3}}{27}r\omega^2$$

$$a_{AB} = a_e = -\frac{2\sqrt{3}}{27}r\omega^2$$