

第九章 刚体的平面运动

§ 9-1 刚体平面运动的运动方程

在第七章中讨论了刚体的两种基本运动，刚体的平动运动和刚体绕固定轴的定轴转动运动。同时通过对刚体的两种基本运动分析给出了刚体作平动运动和绕固定轴的定转动运动时，刚体内任意点的速度矢量和加速度矢量的计算表达式。除上述两种刚体的基本运动形式外，另一种常见的刚体运动形式是刚体的平面运动。刚体平面运动的研究具有两个方面的意义。其一是在实际应用意义。在实际工程中许多机构的运动是平面运动或可简化为平面运动；其二是理论基础作用。平面运动分析理论和研究方法为处理和分析研究刚体更复杂的运动形式提供了必要的基础。

平面运动：在刚体的运动中，若惯性参考系中存在一个确定的平面 I，使得刚体在运动过程中，刚体内任意一点 M 到平面 I 的距离保持不变。则刚体的运动称为平面平行运动。或简称为平面运动。

如图 9-1 所示，位与刚体上的 M 点在运动过程中保持到 I 面的距离不变。且刚体上任意点都具有与 M 点相似的这一运动特征，刚体的这种运动为平面运动。与 I 平面垂直的直线上刚体的所有点具有相同的运动特征（位移，速度矢量，加速度矢量）。

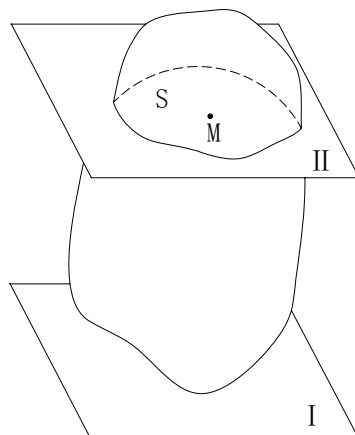


图 9-1

《证明：设 t 时刻作刚体平面运动刚体上 M 点

的位置矢量为 $\mathbf{r}_M(t)$ ； $t + \Delta t$ 时刻 (M' 点)

的位置矢量为 $\mathbf{r}_M(t + \Delta t)$ 。在 t 时刻取与 I 面

垂直的直线上刚体（异于 M 点）N 点。其位置矢量为 $\mathbf{r}_N(t)$ ； $t + \Delta t$ 时刻 (N' 点) 的位

置矢量为 $\mathbf{r}_N(t + \Delta t)$ 。对刚体作刚体平面运动时（见图 9-2）》

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'P'}; \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}; \quad \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{N'P'}$$

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{r}_N(t + \Delta t) - \mathbf{r}_N(t)$$

$$= \mathbf{r}_M(t + \Delta t) + \overrightarrow{M'N'} - [\mathbf{r}_M(t) + \overrightarrow{MN}]$$

$$= \mathbf{r}_M(t + \Delta t) - \mathbf{r}_M(t) = \mathbf{u}_M$$

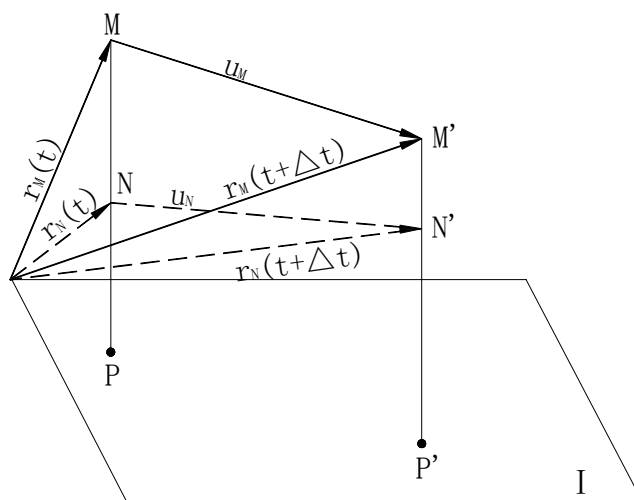


图 9-2

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_N &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_N(t + \Delta t) - \mathbf{r}_N(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_M(t + \Delta t) + \overrightarrow{MN'} - [\mathbf{r}_M(t) + \overrightarrow{MN}]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_M(t + \Delta t) - \mathbf{r}_M(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}_M \\
\mathbf{a}_N &= \frac{d\mathbf{v}_N}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \mathbf{a}_M \quad \gg
\end{aligned}$$

因此作刚体平面运动的刚体上任意平行固定面 I 的平面 (II、III、...) 所截刚体的交面的运动完全相似。各不同截面 (II、III、...) 上对应点的位移矢量、速度矢量、加速度矢量相同。即刚体的平面运动分析简化为与 I 面平行的任一平面与刚体的交面 (或者称为平截面) 在其自身平面内的运动分析。如图 9-1 中 II 平面上的 S 平截面。S 的运动代表了刚

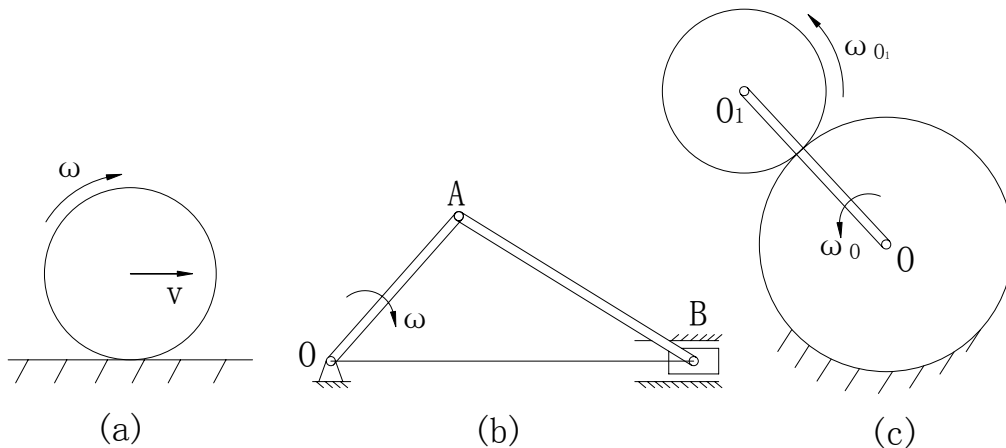


图 9-3

体的平面运动，且 S 平面被视为刚体。本章所涉及的机构中各刚体的运动均为刚体的平面运动 (且刚体的平动运动和刚体的定轴转动运动视为刚体平面运动的两种运动特殊运动。即所涉及的刚体平动运动和刚体的定轴转动运动同时具有刚体平面运动的属性)。所分析机构的示意图均为上述 S 平截面内的几何示意图。如图 9-3 (a) 所示的车轮沿直线轨道的滚动运动；图 9-3 (b) 所示的曲柄连杆机构的运动；图 9-3 (c) 所示行星齿轮 O_1 的运动等。

取平截面 S，并在 S 所在平面内建立与固定面 I 固建在一起的坐标系 oxy 。如图 9-4 所示。由于刚体上任意两点之间的距离保持不变。因此在任意时刻 t ，S 平截面在 oxy 面内的位置完全由其内两点 O' ，

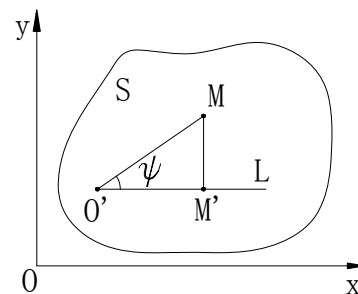


图 9-4

M 两点的位置（或者说由直线段 $O'M$ ）所确定。平面上两点具有四个自由度，而引入两点之间距离保持不变（刚体特征所要求的）约束条件。由此可知， S 平截面在 oxy 平面内的运动具有三个自由度。即 S 图形的 oxy 平面内的运动可由三个参数完全描述。这三个参数的选取具有任意性（因为 O' 、 M 点的选取具有任意性）。如可选取 O' 、 M 点在 oxy 坐标系的坐标 $x_{O'}$ 、 $y_{O'}$ 、 x_M 、 y_M 及两点之间距离 d 为常数的约束条件，即：

$$\begin{cases} x_{O'} = x_{O'}(t) \\ y_{O'} = y_{O'}(t) \\ x_M = x_M(t) \\ y_M = y_M(t) \\ (x_M - x_{O'})^2 + (y_M - y_{O'})^2 = d^2 \end{cases} \quad (a)$$

但由于上述参数选择中带有约束条件，这给刚体平面运动的分析带来了不便。为避免附加约束条件带来的不便，在选取描述直线段 $O'M$ 运动的三个参数时，过 O' 点作 ox 轴的平行线 l 。并设 $O'M$ 直线段与 l 直线的夹角为 φ 。 φ 角的起始度量由 $O'l$ 射线，其转向为由 x 轴正向转向 y 轴正向（图 9-4 中为逆时针转动）为正。反之为负。由于 φ 参数的引入，有下述关系：

$$\begin{cases} x_M = x_{O'} + d \cos \varphi(t) \\ y_M = y_{O'} + d \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (b)$$

将 (b) 式代入 (a) 式得

$$\begin{cases} x_{O'} = x_{O'}(t) \\ y_{O'} = y_{O'}(t) \\ x_M = x_{O'} + d \cos \varphi(t) \\ y_M = y_{O'} + d \sin \varphi(t) \\ 1 = 1 \end{cases} \quad (c)$$

该式表示在任意时刻 t ，只要 $x_{O'}$ 、 $y_{O'}$ 、 φ 给定。则 S 平截面的位置被唯一确定。因此对 S 平截面在 oxy 面内的平面运动的三个参数可取为

$$\begin{cases} x_{O'} = x_{O'}(t) \\ y_{O'} = y_{O'}(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (9-1)$$

$x_{O'}$ 、 $y_{O'}$ 、 φ 作为时间参数 t 的单值连续函数，完全描述了 oxy 面内 S 平截面的平面运动。

因此 (9-1) 式称为刚体平面运动的运动方程。在应用 (9-1) 式的刚体平面运动方程时，应当特别注意参数 $\varphi(t)$ 的起度量和其正负。

§ 9-2 平面运动的分解

刚体平面运动的运动方程 (9-1) 中的 $x_{o'}$ 、 $y_{o'}$ 是 o' 点在固定面内 oxy 坐标系中的坐标。

坐标系 $\{0; i, j\}$ 称为**固定坐标架**。刚体的平面运动分析被简化为 S 平截面相对 $\{0; i, j\}$ 固定坐标架的运动。在 S 平截面上任选一点 A (基点), 并且在 S 平截面上建立坐标系 $\{A; e_1, e_2\}$ 。坐标系 $\{A; e_1, e_2\}$ 称为**固连坐标架**。这样刚体的平面运动就被看作为固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$ 相对于固定坐标架 $\{0; i, j\}$ 的运动。此时刚体平面运动的运动方程:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

实质上是基点 A 相对固定坐标架的运动方程和 e_1 相对 i 转过的转角方程。

为了研究刚体的平面运动, 除固定坐标架 $\{0; i, j\}$ 和固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$ 外。在引入一个中间坐标架 $\{A; i, j\}$ 。中间坐标架 $\{A; i, j\}$ 的坐标原点就是固连坐标架的原点, 即基点 A 。该坐标架的单位基矢量就取为固定坐标架的单位基矢量。且称这一中间坐标架为**平动坐标架**。

在刚体平面运动分析时, 引入了固定坐标架 $\{0; i, j\}$; 固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$; 平动坐标架 $\{A; i, j\}$ 。在这三个坐标架下, 刚体的平面运动 (确切地说是作平面运动刚体上 S 平截面的运动) 可以看作为: S 平截面随基点 A 处平动坐标架 $\{A; i, j\}$ 相对固定坐标架 $\{0; i, j\}$ 的平动运动和固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$ 相对平动坐标架绕基点 A 的定轴转动 (过基点 A 且垂直于 S 平截面的轴相对固定坐标架 $\{0; i, j\}$ 不是固定轴, 但相对平动坐标架 $\{A; i, j\}$ 是固定轴)。或者说在固定坐标架 $\{0; i, j\}$; 固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$; 平动坐标架的框架中, 刚体平面运动时 S 平截面的运动被分解为: 随基点 A 的平动运动和绕基点 A 的转动运动。刚体平面运动的运动方程中

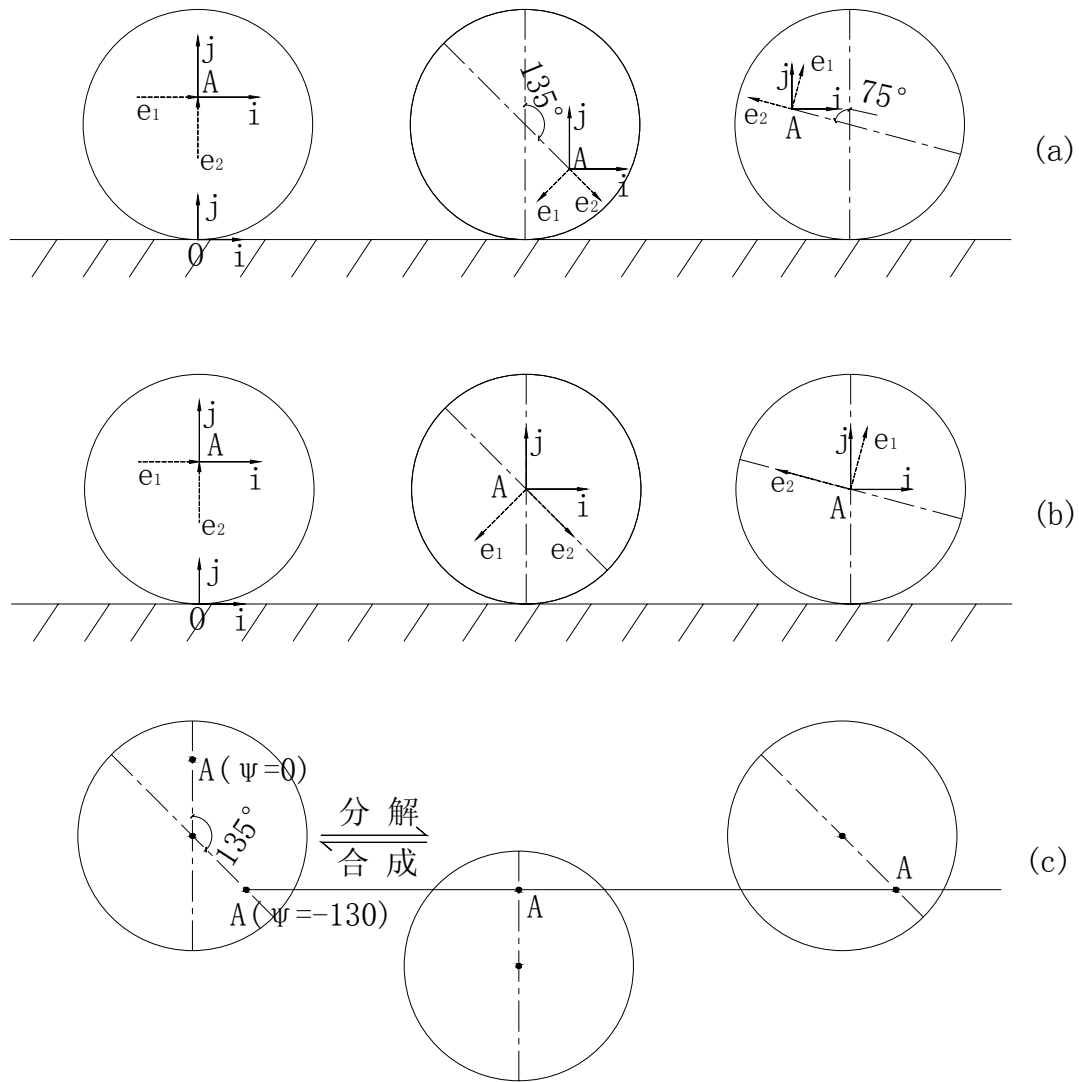
$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \end{cases}$$

给出了 S 平截面随基点 A 的平动运动方程; 刚体平面运动的运动方程中

$$\varphi = \varphi(t)$$

给出了 S 平截面绕基点 A 转动运动方程 (转角方程)。

如图 9-5 所示。圆轮作纯滚动 (平面) 运动时, 固定坐标架 $\{0; i, j\}$; 固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$; 平动坐标架 $\{A; i, j\}$ 在 φ 转动 $-\frac{3}{4}\pi$ 和 $-\frac{19}{12}\pi$ 时, 两种不同基点 A 的选取情况的几何示意图。见图 (a)、图 (b)。图 (c) 给出了 (a) 图中基点 A 的选取及 $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$ 时的 S 平截面平面运动分解为随基点平动坐标架 $\{A; i, j\}$ 的平动运动和固连坐标架 $\{A; e_1, e_2\}$ 绕基



点 A 的转动运动示意图。

图 9-5

由上述作纯滚动圆轮的平面运动分析可以看到，基点选取的不同，平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 相对固定坐标架 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的平动运动的平动速度矢量和平动加速度矢量也就不同。或者说不同的基点选取，其基点的速度矢量和加速度矢量不同。因此在对刚体平面运动分析时，基点的选取将直接影响刚体平面运动分析的繁简。

§ 9-3 求 S 平截面内各点速度的基点法

对于作刚体平面运动的刚体，一旦选定了 S 平截面，并给定固定坐标 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ；固连坐标架 $\{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ；平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 。则 S 平截面内点的速度矢量加速度矢量均可通过点的合成运动分析确定。本节通过点的合成运动分析，给出 S 平截内点的速度矢量。并给出刚体平面运动分析中速度矢量分析的基本方法之一——基点法。

如图 9-6 所示。在 S 平截面上任取一动点 M 。为求动点 M 的速度矢量 \mathbf{v}_M ，建立如图 9-6 所示固定坐标架 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ；固连坐标架 $\{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ；平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 。三个坐标架的另一个正交单位基矢量为 \mathbf{k} （图 9-6 中为垂直纸面向外）。其矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 与 \mathbf{i}, \mathbf{j} 满足。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \end{cases}$$

动点 M 相对固定坐架标的速度矢量（绝对速度矢量）为：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M &= \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A + \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

由于 ξ, η 是位置矢量 \mathbf{r} 在固连坐标架 $\{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 中的坐标。在 S 平截面运动过程中 ξ, η 保持不变。但 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 两个基矢量在 S 平截面运动过程中虽然大小不变，而其方向时间变化。因此：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_A + \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2) \\ &= \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \xi \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \eta \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} \end{aligned}$$

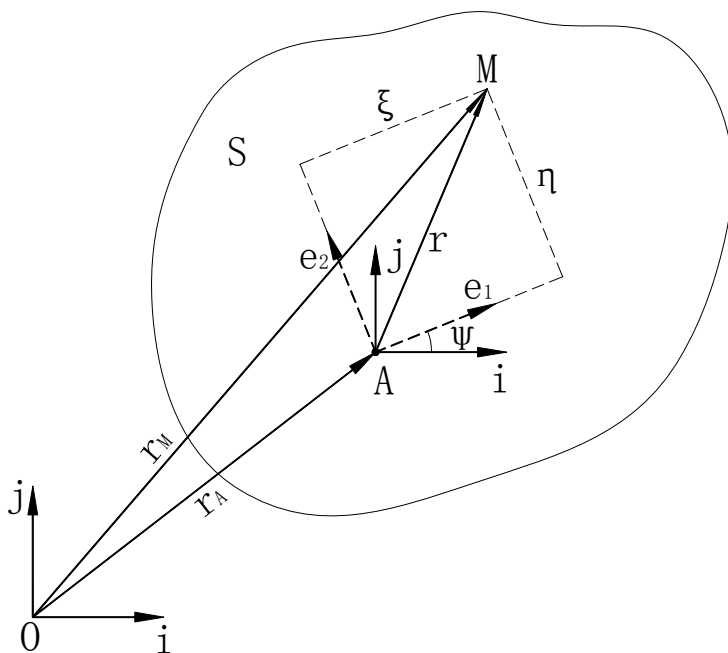


图 9-6

$$= \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \xi \frac{d}{dt}(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \eta \frac{d}{dt}(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})$$

$$= \dot{\mathbf{r}}_A + \xi(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})\dot{\varphi} + \eta(-\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})\dot{\varphi}$$

$$= \dot{\mathbf{r}}_A + (\xi \mathbf{e}_2 - \eta \mathbf{e}_1) \dot{\varphi}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \times (\xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2)$$

$$= (\xi \mathbf{e}_2 - \eta \mathbf{e}_1) \dot{\varphi}$$

$$\therefore \mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{MA} \quad (9-2)$$

该式中 \mathbf{v}_A 为基点 A 相对固定坐标架 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的速度矢量。同时 \mathbf{v}_A 也是平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的速度矢量。对动点 M 而言 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 是动点 M 相对平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的相对速度矢量。因此 (9-2) 式在固定坐标架 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 、固连坐标架 $\{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 、平动坐标架的框架下表明：**动点 M 在随 S 平截面作刚体平面运动的任意时刻，其速度矢量 \mathbf{v}_M 等于基点 A 相对固定坐标架 $\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的基点速度矢量 \mathbf{v}_A 与动点 M 相对平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的相对转动速度矢量 \mathbf{v}_{MA} 的矢量和。**且对作刚体平面运动刚体的上点，利用 (9-2) 式确定该点速度矢量的方法称为**基点法（或称为合成法）**。

由 (9-2) 式可以看出， S 平截面动点 M 的速度矢量 \mathbf{v}_M 与基点 A 的选取有关。对 S 平截面而言，其上各点的速度矢量是相同的。因此选取 S 平截面上的不同点为基点时，基点的速度矢量将不相同。即 S 平截面随基点的平动速度矢量与基点的选取有关。但 S 平截面相对平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点的选取无关。如图 9-7 所示， S 平截面上动点 M 。针对动点 M 取二组坐标架：

$$\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}、\{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}、\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$$

$$\{0; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}、\{\bar{A}; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}、\{\bar{A}; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$$

分别对应基点 A 和基点 \bar{A} 。

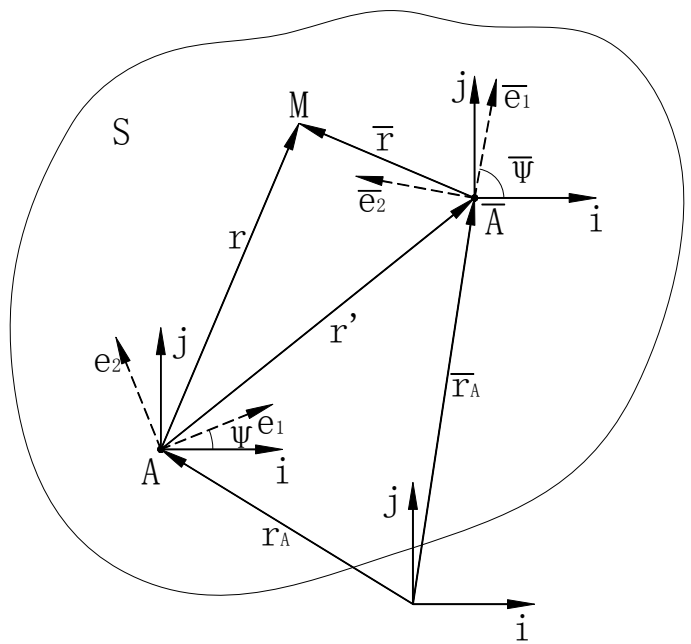


图 9-7

对第一组坐标架，以 M 、 \bar{A} 为动点则

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (a)$$

$$\mathbf{v}_{\bar{A}} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (b)$$

对第二组坐标架，以 M 为动点。则

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{\bar{A}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}} \quad (c)$$

将 (a)、(b) 式代入 (c) 式得：

$$\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

由于 \bar{A} 选取的任意性, $\bar{\mathbf{r}}$ 是任意选定的矢量。因此有

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{d})$$

该式表明相对平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, S 平截面转动的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点选取无关。同时由于:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}$$

即相对平动坐标架 $\{A; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, S 平截面转动的角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 也与基点选取无关。

例题 9-1 如图 9-8 所。半径为 R 的在水平面上作纯滚动运动圆轮。若轮心的速度矢量为 \mathbf{u} 。试求图示瞬时 AB 线上各点速度矢量 (并画在图上)。

解:

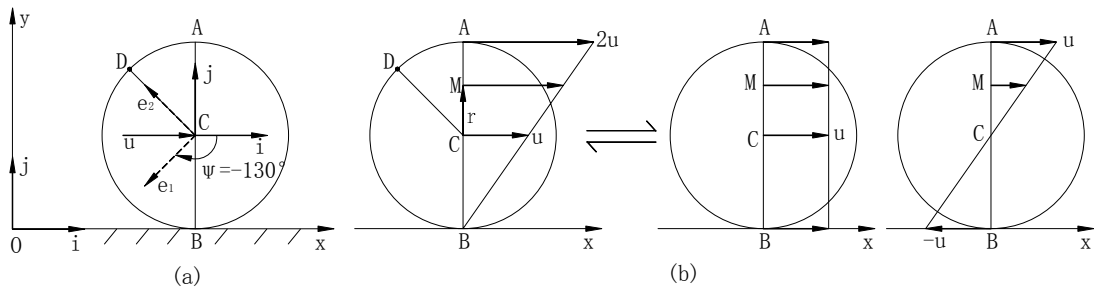


图 9-8

轮心作直线运动。其运动方程为:

$$\begin{cases} x_c = R|\varphi| \\ y_c = R \end{cases}$$

$$|\mathbf{u}| = \dot{x}_c = -R\dot{\varphi}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} = -\frac{u}{R} \quad ; \quad (\text{负号表示转动为顺时针})$$

该式表明: 圆轮 (盘、柱) 作纯滚动运动时, 轮 (盘、柱) 心速度矢量的大小等于半径与转动角速度矢量大小的乘积。

以 M 为动点, C 为基点。则:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}
 &= u \mathbf{i} + \left(-\frac{u}{R}\right) \mathbf{k} \times (r \mathbf{j}) \\
 &= u \mathbf{i} + u \frac{r}{R} \mathbf{i}
 \end{aligned}$$

当 $r = R$ 时; $\mathbf{v}_M = 2u$;

当 $r = 0$ 时; $\mathbf{v}_M = u$;

当 $r = -R$ 时, $\mathbf{v}_M = 0$ 。

其 AB 线上速度矢量分布如图 9-8 (b) 所示。图 9-8 (b) 中还给出了圆轮平面运动时的 (本例中为沿直线的纯滚动) A 、 B 两点连线上各点的刚体平动运动和刚体绕平动坐标架的转动运动分解示意图。

例 9-2: 试证明平面运动刚体上 S 平截面上任意两点 AB 的速度矢量 \mathbf{v}_A 、 \mathbf{v}_B 在 A 、 B 两点连线上的投影相等。

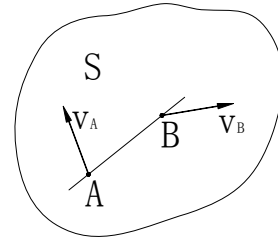


图 9-9

证:

如图 9-9 所示作矢量:

$$\mathbf{l} = \frac{\overline{AB}}{|AB|}$$

选取 A 点为基点, B 点为动点。则:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$$

等式两边点乘 \mathbf{l} , 得:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} | \overline{AB} |)$$

$$\because \mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} | \overline{AB} |) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{l}) | \overline{AB} | = 0$$

$$\therefore \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_A$$

或 $[\mathbf{v}_B]_{AB} = [\mathbf{v}_A]_{AB}$

该式也称为**速度投影定理**。

例 9-3: 如图 9-10 所示。椭圆规尺 A 端滑块以大小为 $|\mathbf{v}_A|$ 的速度水平向右运动。若已知 AB 杆长为 l , AB 杆与水平线的夹角为 φ 。试 B 端滑块的速度矢量 $\mathbf{v}_B = ?$, AB 杆的角速度 $\omega = ?$

解:

一、基点法: 取 A 为基点, B 为动点。则由:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

在 B 点处画出速度分析图。如图 9-10 所示。建

立局部坐标系 $B\xi\eta$ 。

$$\begin{cases} v_{B\xi} = (v_{BA})_{\xi} + v_{A\xi} \\ v_{B\eta} = (v_{BA})_{\eta} + v_{A\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \omega l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - v_A \\ v_B = \omega l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = \frac{v_A}{l \sin \varphi} \\ v_B = \frac{v_A \cos \varphi}{\sin \varphi} = v_A \operatorname{ctg} \varphi \end{cases}$$

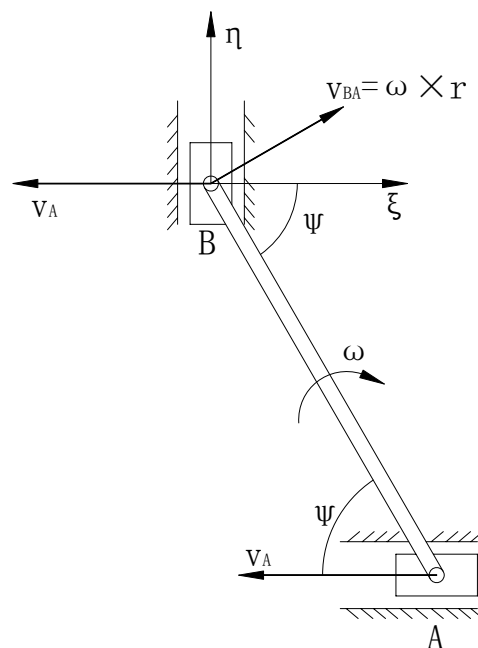


图 9-10

v_B 方向向上, 大小为 $v_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi$ 。

二、投影法

$$v_A \cos \varphi = v_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$v_B = v_A \operatorname{ctg} \varphi$$

通过本例可以看出: 当已知 S 平截面上一点速度大小和方向, 并已知另一点速度矢量线的方位时, 直接应用投影法很容易求 S 平截面上一点的速度矢量的大小。但投影法的投影式 (9-3) 不能直接用来求解 S 平截面转动的角速度 ω 。

§ 9-4 求平面运动图形内各点速度的瞬心法

研究平面图形上各点的速度，除基点法和投影法外，更常用的还有用瞬心法。本节给出求平面运动图形内各点速度的瞬心法。

一：平面运动图形的速度瞬心

定理：一般情况，在每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点。

证明：设有一个平面图形 S ，如图 9-11 所示。取图形上的点 A 为基点，它的速度为 v_A ，图形的角速度的绝对值为 ω ，转向如图所示。图形上任一点 M 的速度矢量可按式计算：

$$v_M = v_A + v_{MA}$$

如图 9-11 所示。点 M 与 v_A 的垂线 AN 上（由 v_A 到 AN 的转向与图形的转向一致），由图中看出， v_A 和 v_{MA} 在同一直线上，而方向相反，故 v_M 的大小为：

$$v_M = v_A - \omega \times AM$$

由上式可知，随着点 M 在垂线 AN 上的位置不同， v_M 的大小也不同，因此总可以找到一点 C ，这点的瞬时速度等于零。令

$$AC = \frac{v_A}{\omega}$$

则

$$v_C = v_A - AC \times \omega = 0$$

于是定理得到证明。在某一瞬时，平面图形内速度等于零的点称为瞬时速度中心，或简称为速度瞬心。

二：平面运动图形内各点的速度及其分布

根据上述定理，每一瞬时在平面运动的图形内都存在速度矢量等于零矢量的一点 C ，即 $v_C=0$ 。选取点 C 作为基点，图 9-12 (a) 中 A 、 B 、 D 等各点的速度为：

$$v_A = v_C + v_{AC} = v_{AC}$$

$$v_B = v_C + v_{BC} = v_{BC}$$

$$v_D = v_C + v_{DC} = v_{DC}$$

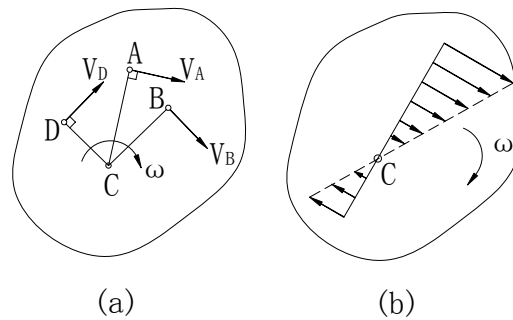


图 9-12

由此得结论：平面运动图形内任一点的速度等于该点随图形绕瞬时速度中心（速度瞬心）转动的速度。

由于平面图形绕任意点转动的角速度都相等，因此平面运动图形绕速度瞬心 C 转动的角速度等于图形绕任一基点转动的角速度，以 ω 表示这个角速度，于是有：

$$v_A = v_{AC} = \omega \times AC$$

$$v_B = v_{BC} = \omega \times BC$$

$$v_D = v_{DC} = \omega \times DC$$

由此可见，平面运动图形内各点速度矢量的大小与该点到速度瞬心的距离成正比。速度矢量的方向垂直于该点到速度瞬心的连线，指向图形转动的一方，如图 9-12 (a) 所示。

平面运动图形上各点速度在某瞬时的分布情况，与图形绕定轴转动时各点速度的分布情况类似，如图 9-17 (b) 所示。因此，平面运动图形的运动可看成为绕速度瞬心的瞬时转动。

应该强调指出，刚体作平面运动时，在每一瞬时，图形内必有一点为速度瞬心；但是，在不同的瞬时，速度瞬心在图形内的位置是不同的。

综上所述可知，如果已知平面运动图形在某一瞬时的速度瞬心位置和角速度，则在该瞬时，图形内任一点的速度矢量可以完全确定。

在解题时，根据机构的几何条件，**确定速度瞬心位置的方法有下列几种：**

(1) 平面运动图形沿一固定表面作无滑动的滚动，如图 9-13 所示。平面运动图形与固定面的接触点 C 就是图形的速度瞬心，因为在这一瞬时，点 C 相当于固定面的速度为零，所以它的绝对速度等于零。在轮滚动的过程中，轮缘上的各点相继与地面接触而成为车轮在不同时刻的速度瞬心。

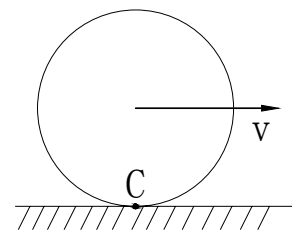


图 9-13

(2) 已知图形内任意两点 A 和 B 的速度的方向，如图 9-14 所示，速度瞬心 C 的位置必在每一点速度的垂线上。因此在图 9-14 中，通过点 A ，作垂直于 v_A 方向的直线 Aa ；再通过点 B ，作垂直于 v_B 方向的直线 Bb 。设两条直线交于点 C ，则点 C 就是平面图形的速度瞬心。

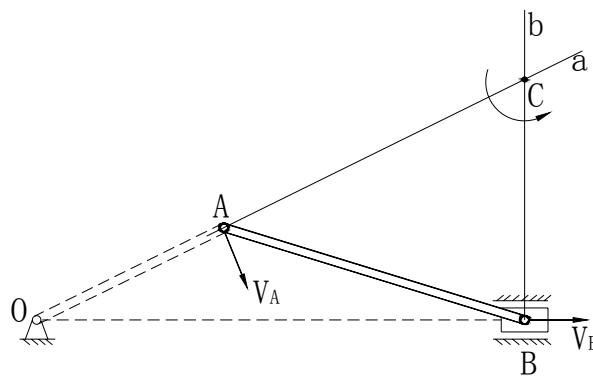


图 9-14

(3) 若平面运动图形上两点 A 和 B 的速度矢量相互平行，并且速度矢量的方向垂直于

两点的连线 AB ，如图 9-15 所示。则速度瞬心必定在 A 、 B 两点连线 AB 与速度矢量 v_A 和 v_B 端点连线的交点 C 上《参看图 9-12 (b)》。因此，欲确定图 9-15 所示齿轮的速度瞬心 C 的位置，不仅需要知道 v_A 和 v_B 的方向，而且还需要知道它们的大小。

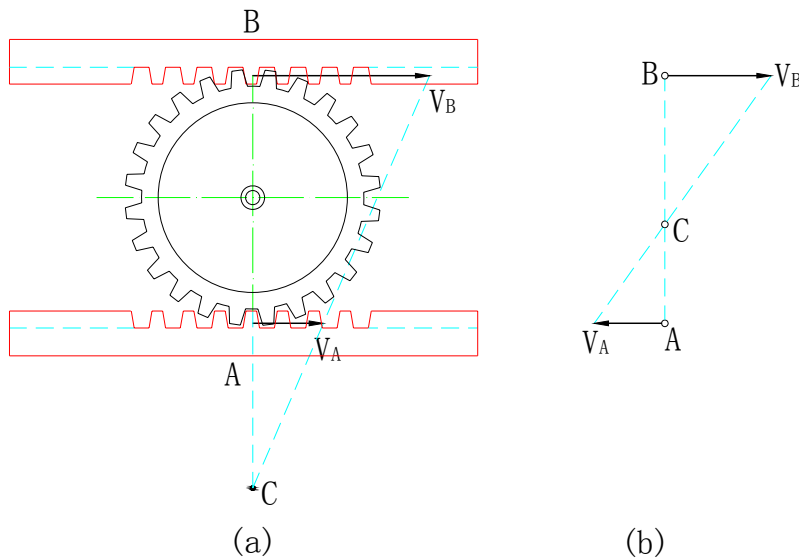


图 9-15

当 v_A 和 v_B 同向时，图形的速度瞬心在 AB 的延长线上，如图 9-15 (a) 所示；当 v_A 和 v_B 反向时，图形的速度瞬心 C 在 A 、 B 两点之间如图 9-15 (b) 所示。

(4) 某一瞬时，平面运动图形上 A 、 B 两点的速度矢量相等，即 $v_A = v_B$ 时，如图 9-16 所示。这种情况下平面运动图形的速度瞬心在无限远处。在该瞬时，图形上各点的速度分布如同平面图形作刚体平动的情形一样，因此称瞬时平动。必须注意，此瞬时各点的速度虽矢量然相同，但加速度矢量不一定不同。

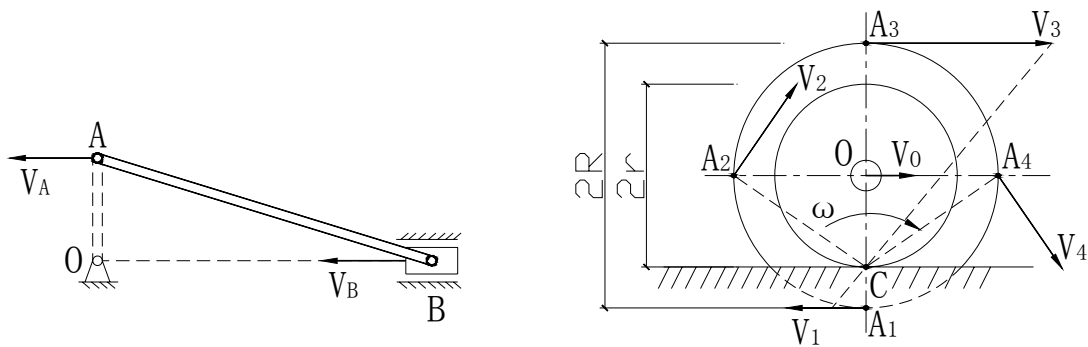


图 9-16

图 9-17

例 9-4: 车厢的轮子沿直线轨道滚动而无滑动，如图 9-16 所示。已知车轮中心 O 的速度为 v_0 。当半径 R 和 r 为已知时，试求轮上 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 各点的速度。(其中 A_2 、 O 、 A_4 三点在同一铅直线上。)

解：因为车轮只滚动无滑动，故车轮与轨道的接触点 C 就是车轮的速度瞬心。令 ω 为

车轮绕速度瞬心转动的角速度, 由 $v_O = r\omega$, 从而求得车轮的角速度的转向如图 9-17 所示。

其大小为:

$$\omega = \frac{v_O}{r}$$

图 9-17 中各点的速度分为:

$$v_1 = A_1C \times \omega = \frac{R-r}{r}v_O$$

$$v_2 = A_2C \times \omega = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}v_O$$

$$v_3 = A_3C \times \omega = \frac{R+r}{r}v_O$$

$$v_4 = A_4C \times \omega = \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}v_O$$

各点速度的方向分别垂直于 A_1C 、 A_2C 、 A_3C 和 A_4C , 指向如图 9-17 所示。

例 9-5: 如图 9-18 所示。已知 A 点速度矢量 v_A 。试用瞬心法求 B 点速度矢量 $v_B = ?$

解: 分别作 A 和 B 两点速度矢量的垂线。两条直线的交点 C 就是平面运动图形 AB 的速度瞬心, 如图 9-18 所示。平面运动图形 AB 的角速度为:

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \sin \varphi}$$

B 点的速度为:

$$v_B = BC \times \omega = \frac{BC}{AC}v_A = v_A \cot \varphi$$

用瞬心法也可以求平面运动图形内任一点的速度。

例如杆 AB 中点 D 的速度矢量的大小为:

$$v_D = DC \times \omega = \frac{l}{2} \cdot \frac{v_A}{l \sin \varphi} = \frac{v_A}{2 \sin \varphi}$$

D 点速度矢量的方向垂直于 DC , 且朝向平面运动图形转动的一方。

由以上各例可以看出, 用瞬心法解题, 其步骤与基点法类似。前两步完全相同, 只是第三步要根据已知条件, 求出图形的速度瞬心的位置和平面图形转动的角速度, 最后求出各点的速度。

对于由几个平面运动图形组成的平面机构, 则可依次对每一平面运动图形, 按上述步骤进行, 直到求出所需的全部未知量为止。应该注意, 每一个平面运动图形有它自己的速度瞬心和角速度。因此, 每求出一个瞬心和角速度, 应明确标出它是哪一个平面运动图形

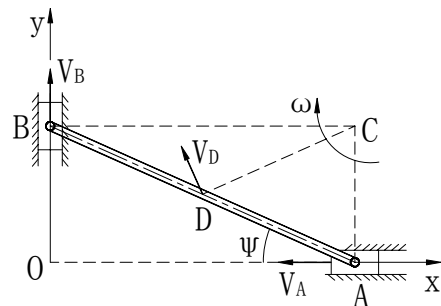


图 9-18

的瞬心和角速度，决不可混淆。

例 9-6 矿石轧碎机的活动夹板 AB 长 600mm，由曲柄 OE 借连杆组带动，使它绕 A 轴摆动，如图 9-19 所示。曲柄 OE 长 100mm，角速度为 10rad/s 。连杆组由杆 BG 、 GD 和 GE 组成，杆 BG 和 GD 各长 500mm。求当机构在图示位置时，夹板 AB 的角速度。

解：此机构由五个刚体组成：杆 OE 、 GD 和 AB 绕各自固定轴作定轴转动运动；杆 GE 和

BG 作平面运动。欲求杆 AB 的角速度 ω_{AB} ，必须先确定点 B 的速度大小，因为 $\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB}$ ；

而欲求 v_B ，则应先求点 G 的速度。

杆 GE 作平面运动，点 E 的速度方向垂直于 OE ，点 G 在以 D 为圆心的圆弧上运动，因此速度 v_G 的方向垂直于 GD 。作 G 、 E 两点速度矢量的垂线，交于点 C_1 （图示瞬时杆 GE 杆的速度瞬心）。

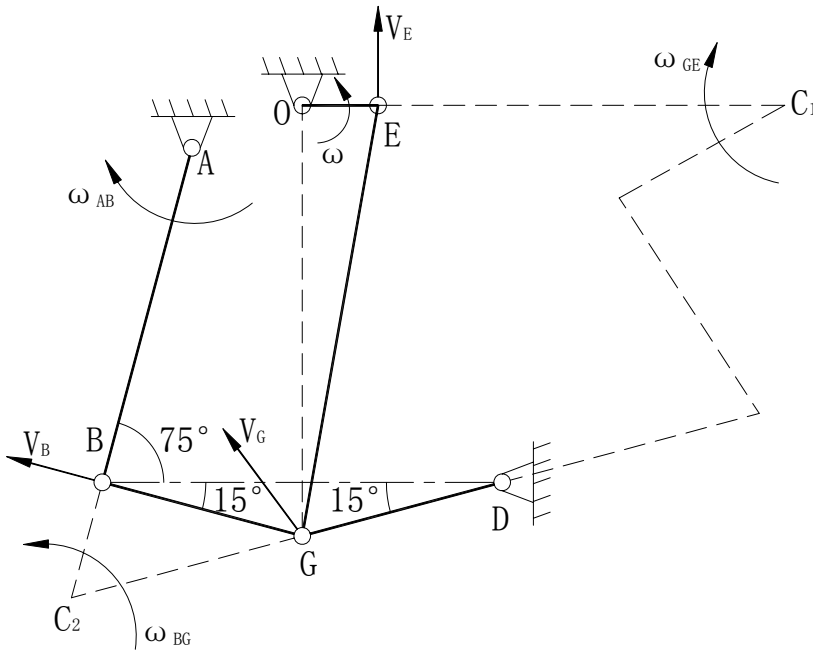


图 9-19

由图中几何关系得：

$$OG = 800 + GD \sin 15^\circ = 929.4 \text{ mm}$$

$$EC_1 = OC_1 - OE = OG \times \cot 15^\circ - OE = 3369 \text{ mm}$$

$$GC_1 = \frac{OG}{\sin 15^\circ} = 3591 \text{ mm}$$

由此得杆 GE 的角速度为：

$$\omega_{GE} = \frac{v_E}{EC_1} = \frac{\omega \times OE}{EC_1} = 0.2968 \text{ rad/s}$$

G 点的速度 v_G 的大小为:

$$v_G = \omega_{GE} \times GC_1 = 1.066 \text{ m/s}$$

杆 BG 同样平面运动。求得了 G 点的速度大小和方向, 并知道了 B 点的速度必垂直于 AB 。作两速度矢量的垂线交于点 C_2 (杆 BG 在图示瞬时的速度瞬心)。按照 v_G 相同的计算方法可求得:

$$\omega_{BG} = \frac{v_G}{GC_2}$$

$$\omega_B = \omega_{BG} \times BC_2 = v_G \frac{BC_2}{GC_2} = v_G \cos 60^\circ$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = \frac{v_G \cos 60^\circ}{AB} = 0.888 \text{ rad/s}$$

由此可以看出:

- (1) 机构的运动都是通过各部件的连接点来传递的;
 - (2) 在每一瞬时, 机构中作平面运动的各刚体有各自的速度瞬心和角速度。
- 求解此题用速度投影定理将更为简单, 读者可自己试作。

§ 9-4 用基点法求平面图形内各点的加速度

现在讨论平面运动图形内各点的加速度。如图 9-20 所示平面运动图形 S 的运动可分解为两部分: (1) 随同基点 A 的平动 (牵连运动); (2) 绕基点 A 的转动 (相对运动)。于是, 平面图形内任一点 B 的运动也由这两种运动合成, 其加速度可以用加速度合成定理求出。因为牵连运动为平动, 点 B 的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。

定理: 平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向速度和法向加速度的矢量和。(证明略)

由于牵连运动为平动, 点 B 的牵连加速度等于基点 A 的加速度 a_A ; 点 B 的相对加速度 a_{BA} 是该点随图形绕基点 A 转动的加速度, 可分为切向加速度与法向加速度两部分。于是用基点法求点的加速度合成公式为:

$$a_B = a_A + a_{BA}^{\tau} + a_{BA}^n \quad (9-3)$$

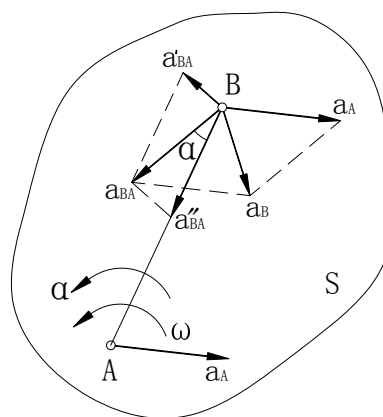


图 9-20

式 (9-2) 中, a_{BA}^{τ} 为点 B 绕基点 A 转动的切向加速度, 方向与 AB 垂直, 大小为:

$$a_{BA}^{\tau} = AB \cdot \alpha$$

α 为平面运动图形的角加速度。 a_{BA}^n 为 B 点绕基点 A 转动的法向加速度, 指向基点 A , 大小为:

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$$

ω 为平面运动图形的角速度。

式 (9-3) 为平面运动图形内任意点的各加速度矢量间的矢量等式, 通常可向两个正交的坐标轴投影, 得到两个投影方程, 用以求解两个未知量。

例 9-7 如图 9-21 所示。在外啮合行星齿轮机构中, 系杆 $O_1O = l$, 以匀角速度 ω_1 绕 O_1

转动。大齿轮 II 固定, 行星轮 I 半径为 r , 在轮 II 上只滚不滑。设 A 和 B 是轮缘上的两点, 点 A 在 O_1O 的延长线上, 而点 B 则在垂直于 O_1O 的半径上。试求点 A 和 B 舞蹈速度。

解: 轮 I 作平面运动, 其中心 O 的速度和加速度分别为:

$$v_O = l\omega_1$$

$$a_O = l\omega_1^2$$

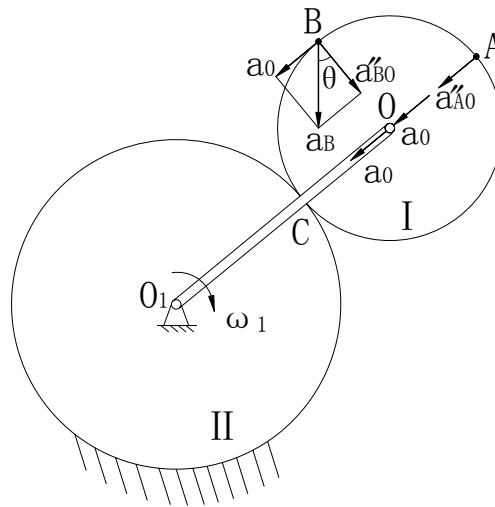


图 9-21

选点 O 作为基点。由题意知, 轮 I 的速度瞬心在两轮的接触点 C 处。设轮 I 的角速度为 ω , 则:

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r} \omega_1$$

因为 ω_1 为不变的恒量。所以 ω 也是恒量, 因此轮 I 的角加速度等于零。即:

$$a_{AO}^{\tau} = a_{BO}^{\tau} = 0$$

A 、 B 两点相对于基点 O 的法向加速度分别沿半径 OA 和 OB , 指向中心 O , 它们的大小为:

$$a_{AO}^n = a_{BO}^n = r\omega^2 = \frac{l^2}{r} \omega_1^2$$

由 (9-3) 式可确定 A 点的绝对加速度:

$$a_A = a_O + a_{AO}^n = l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2 = l\omega_1^2$$

其方向沿 OA , 指向 O 。

B 点的加速度大小为:

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + (a_{BO}^n)^2} = l\omega_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

其与半径 OB 间的夹角为:

$$\theta = \arctan \frac{a_O}{a_{BO}^n} = \arctan \frac{l\omega_1^2}{\frac{l^2}{r}\omega_1^2} = \arctan \frac{r}{l}$$

例 9-8: 如图 9-22 所示。在椭圆规的机构中, 曲柄 OD 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动。

$OD=AD=BD=l$ 。求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 杆 AB 的

角加速度和点 A 的加速度。

解: 曲柄 OD 绕 O 轴转动;

杆 AB 作平面运动。

取杆 AB 上的点 D 为基点。则:

$$a_D = \omega^2 l$$

其的方向沿 OD 指向点 O 。

点 A 的加速度为:

$$a_A = a_D + a_{AD}^{\tau} + a_{AD}^n$$

其中 a_D 的大小和方向以及 a_{AD}^n 的大小和方向都是已知的。由于点 A 作直线运动。设 a_A 的方向如图所示; a_{AD}^{τ} 垂直于 AD , 其方

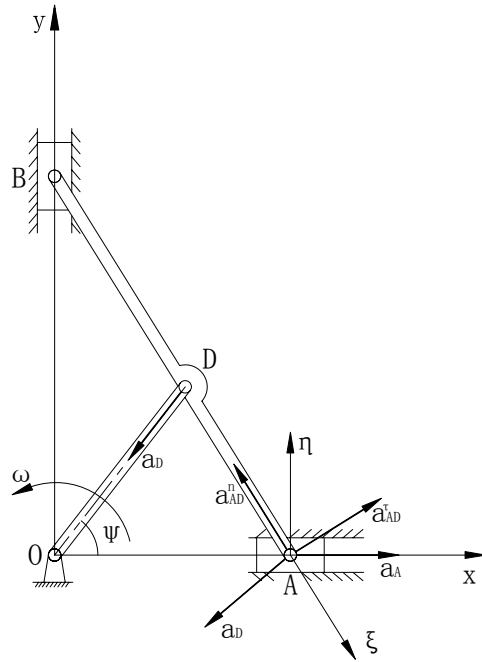


图 9-22

向假设为图 9-22 所示。 a_{AD}^n 沿 AD 指向点 D , 其的大小为:

$$a_{AD}^n = \omega_{AB}^2 \times AD$$

其中 ω_{AB} 为杆 AB 的角速度。 ω_{AB} 可由基点法或瞬心法求得:

$$\omega_{AB} = \omega$$

$$\therefore a_{AD}^n = \omega^2 \times AD = \omega^2 l$$

为确定 a_A 和 a_{AD}^τ 的大小。取 ξ 轴垂直于 a_{AD}^τ ， η 轴垂直于 a_A 。 η 和 ξ 的正方向如图 9-22 所示。将 a_A 的矢量式分别在 ξ 和 η 轴上投影得：

$$a_A \cos \varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^n$$

$$0 = -a_D \sin \varphi + a_{AD}^\tau \cos \varphi + a_{AD}^n \sin \varphi$$

解之得：

$$a_A = \frac{a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^n}{\cos \varphi} = \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -\omega^2 l$$

$$a_{AD}^\tau = \frac{a_D \sin \varphi - a_{AD}^n \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l) \sin \varphi}{\cos \varphi} = 0$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AD} = 0$$

由于 a_A 为负值，故 a_A 的实际方向与原假设的方向相反。

例 9-9 如图 9-23 (a) 所示，车轮沿直线纯滚动。已知车轮半径为 R ，中心 O 的速度 v_O ，加速度为 a_O 。设车轮与地面接触无机对滑动。求车轮上速度瞬心的加速度。

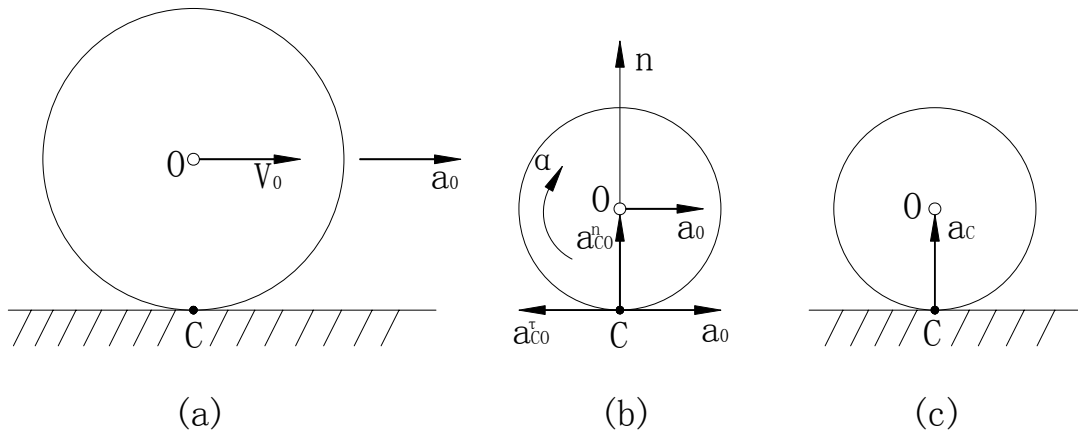


图 9-23

解：由轮子纯滚动条件，车轮的角速度为：

$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

车轮的角加速度 α 等于角速度对时间的一阶导数。上式对任何瞬时均成立，故对时间求导得：

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_O}{R} \right)$$

因为 R 是常量：

$$\therefore \alpha = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt}$$

由于轮心 O 作直线运动，其速度 v_O 对时间的一阶导数等于该点的加速度 a_O 。于是：

$$\alpha = \frac{a_O}{R}$$

车轮作平面运动。取中心 O 为基点，按照式 (9-3) 求得点 C 的加速度矢量为：

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{CO}^{\tau} + \mathbf{a}_{CO}^n$$

式中：

$$\mathbf{a}_{CO}^{\tau} = \alpha R = a_O$$

$$\mathbf{a}_{CO}^n = \omega^2 R = \frac{v_O^2}{R}$$

其方向如图 9-23 (b) 所示。

由于 \mathbf{a}_O 与 \mathbf{a}_{CO}^{τ} 的大小相等，方向相反，

$$\therefore \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{CO}^n$$

由此可知，速度瞬心 C 的加速度不等于零。当车轮在地面上只滚动不滑动（纯滚动）时，速度瞬心 C 的加速度指向轮心 O ，如图 9-23 (c) 所示。

由以上各例可见，用基点法求平面图形上点的加速度的步骤与用基点法求点的速度的步骤基本相同。但由于在公式

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\tau} + \mathbf{a}_{BA}^n$$

对平面运动图形，上式在 xoy 坐标系中有八个分量，利用 x 、 y 方向的两个投影方程，当八个分量中已知六个时，可通过 x 、 y 方向的两个投影方程确定另外两个量。

§ 9-5 运动学综合应用举例

工程中的机构都是由数个物体组成的，各物体间通过联接点而传递运动。为分析机构的运动，首先要分清各物体都作什么运动，要计算有关联接点的速度矢量和加速度矢量。

为分析平面运动图形某点的运动，如能确定其位置矢量与时间的（矢量）函数关系，则可直接建立相关（速度矢量、加速度矢量）运动（矢量）方程。利用解析方法求其运动全过程的速度矢量和加速度矢量。当难确定其位置矢量与时间的（矢量）函数关系（运动方程）或只对机构某些瞬时位置的运动参数感兴趣时，可根据刚体各种不同运动的形式，确定此刚体的运动与其上一点运动的关系。通常利用合成运动或平面运动的理论来分析相关的两个点某瞬时的速度矢量和加速度矢量间联系。

平面运动理论用来分析同一平面运动刚体上两个不同点间的速度和加速度联系。当两个刚体相接触而有相对滑动时，则需要合成运动的理论分析这二个不同刚体上相重合一点的速度矢量和加速度矢量间联系。两物体间有相互运动，虽不接触，其重合点的运动也符合合成运动的关系。

在复杂的机构中，可能同时有平面运动和点的合成运动问题。应注意分别分析、综合应用有关理论。有时同一问题可用不同的方法分析，则应经过分析、比较后，选用较简便的方法求解。

下面通过几个例题说明这些方法的综合应用。

例 9-10：如图 9-24 所示平面机构。滑块 B 可沿杆 OA 滑动。杆 BE 与 BD 分别与滑块 B 铰接； BD 杆可沿水平导轨运动。滑块 E 以匀束速 v 沿铅直导轨向上运动。杆 BE 长为 $\sqrt{2}l$ 。在图 9-24 所示瞬时，杆 OA 铅直，且与杆 BE 夹角为 45° 。试求该瞬时杆 OA 的角速度与角加速度。

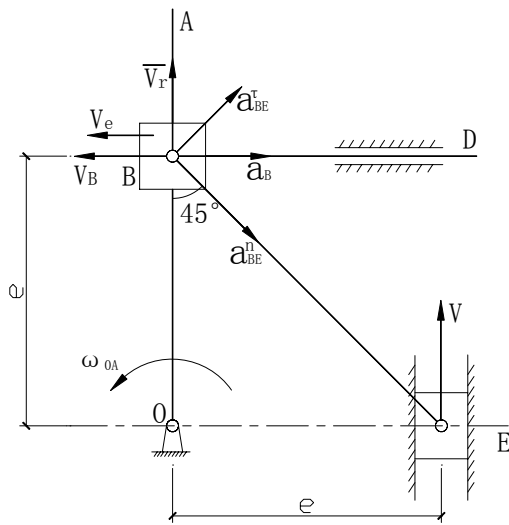


图 9-24

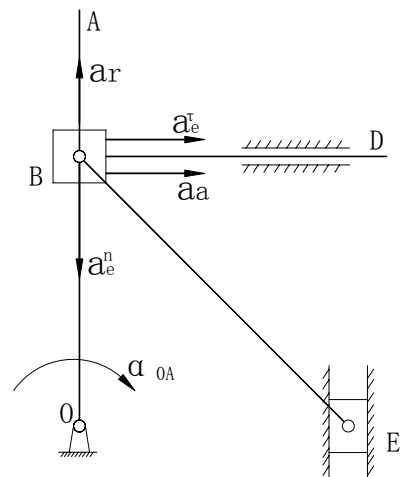


图 9-25

解： BE 杆作平面运动：首先确定 B 点的速度和加速度。 B 点连同滑块在 OA 杆上滑动，并带动杆 OA 转动，利用合成运动方法求解杆 OA 的角速度和角加速度。

BE 杆作平面运动：在图 9-24 中，由 v 及 v_B 方向可知此瞬时 O 点为 BE 的速度瞬心，

$$\therefore \omega_{BE} = \frac{v}{OE} = \frac{v}{l}$$

$$\mathbf{v}_B = \omega_{BE} \times OB = v$$

以 E 为基点， B 点的加速度为：

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{BE}^{\tau} + \mathbf{a}_{BE}^n \quad (a)$$

式中各矢量方向如图 9-24 所示。由于点 E 作匀速直线运动，故 $a_E=0$ 。 \mathbf{a}_{BE}^n 的大小为：

$$a_{BE}^n = \omega_{BE}^2 \times BE = \frac{\sqrt{2}v^2}{l}$$

将式 (a) 投影到沿 BE 方向的轴上得：

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BE}^n$$

$$\therefore a_B = \frac{a_{BE}^n}{\cos 45^\circ} = \frac{2v^2}{l}$$

以上利用刚体平面运动分析方法求得了滑块 B 的速度矢量和加速度矢量。由于滑块 B 可以沿杆 OA 滑动，利用点的合成运动分析方法可确定杆 OA 的角速度及角加速度。

取滑块 B 为动点，动系固结在杆 OA 上，点的速度合成定理为：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

式中 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_B$ ；牵连速度 \mathbf{v}_e 是 OA 杆上与滑块 B 重合那一点的速度，其方向垂直于 OA ，因此与 \mathbf{v}_a 同向；相对速度 \mathbf{v}_r 沿 OA 杆，即垂直于 \mathbf{v}_a 。显然有：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{v}_r = 0$$

即

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_B = v$$

于是得杆 OA 的角速度：

$$\omega_{OA} = \frac{v_e}{OB} = \frac{v}{l}$$

其转向如图 9-24 所示。

滑动 B 的绝对加速度 $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_B$ ，其牵连加速度有法向及切向两项，其法向部分为：

$$a_e^n = \omega_{OA}^2 \times OB = \frac{v^2}{l}$$

由于滑块 B 的相对运动是沿 OA 杆的直线运动，因此其相对加速度 \mathbf{a}_r 也沿 OA 方向。即：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^{\tau} + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (b)$$

此瞬时 $v_r=0$, $a_c=0$ 。在 (b) 式中, 各矢量方向已知, 如图 9-25 所示; 未知量为 a_r 及 a_e^r 的大小, 共两个。将式 (b) 投影到与 a_r 垂直的 BD 线上得:

$$a_a = a_e^r$$

∴

$$a_e^r = a_B = \frac{2v^2}{l}$$

OA 杆的角加速度为:

$$\alpha_{OA} = \frac{a_e^r}{OB} = \frac{2v^2}{l^2}$$

角加速度方向如图 9-25 所示。

上面的求解方法是依次应用刚体平面运动及点的合成运动分析方法求解, 这是机构运动分析中较常用的方法之一。

例 9-11 在图 9-26 (c) 所示平面机构中, 杆 AC 在导轨中以匀速 v 平动。通过铰链 A 带动杆 AB 沿导套 O 运动, 导套 O 与杆 AC 距离为 l 。图示瞬时杆 AB 与杆 AC 夹角为 $\varphi = 60^\circ$, 求该瞬时杆 AB 的角速度及角加速度。

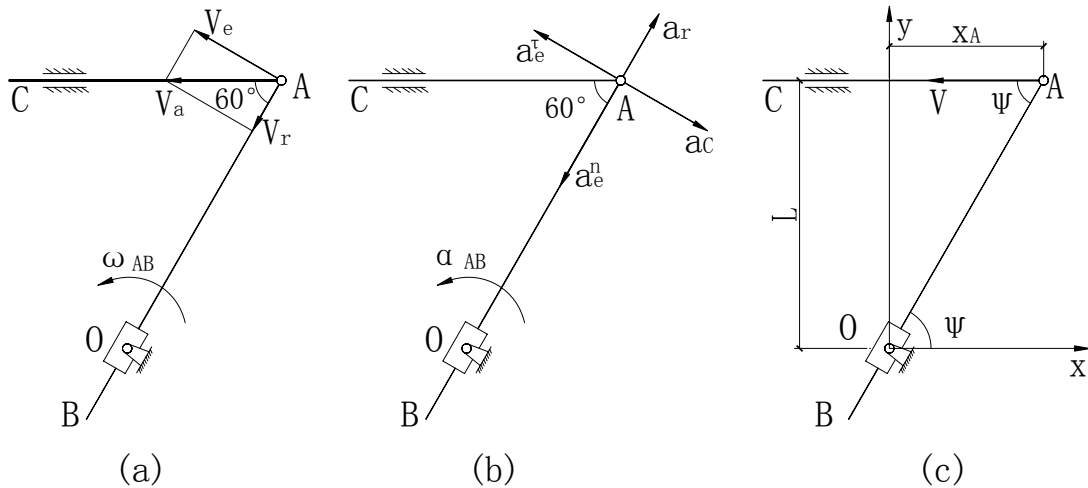


图 9-26

解: 本题可以用几种方法求解。

方法 1:

以 A 为动点, 动系固结在导套 O 上, 牵连运动为绕 O 的转动; A 点的绝对运动为以匀速 v 沿 AC 方向的运动; 相对运动是 A 点沿导套 O 的运动。各速度矢如图 9-26 (a) 所示。

∴

$$v_a = v_e + v_r = v$$

$$\therefore v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

由于杆 AB 在导套 O 中滑动，因此杆 AB 与导套 O 具有相同的角速度及角加速度。其角速度为：

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$

由于 A 点为匀速直线运动，故绝对加速度为零。点 A 的相对运动为沿导套 O 的直线运动，因此 \mathbf{a}_r 沿杆 AB 方向，故有：

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (a)$$

式中 $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$ ，其方向如图 9-26 (b) 所示。将矢量方程式 (a) 投影到 \mathbf{a}_e^τ 方向得：

$$a_e^\tau = a_C = \frac{3v^2}{4l}$$

杆 AB 的角加速度方向如图 9-26 (b) 所示，大小为：

$$a_{AB} = \frac{a_e^\tau}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

方法 2：

以点 O 为坐标原点，建立如图 9-26c 所示的 xoy 直角坐标系。如图可知：

$$x_A = l \cot \varphi$$

将其两端对时间求导，并注意到 $\dot{x}_A = -v$ 得：

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin^2 \varphi \quad (b)$$

将其再对时间求导得：

$$\ddot{\varphi} = \frac{v\dot{\varphi}}{l} \sin 2\varphi = \frac{v^2}{l^2} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi \quad (c)$$

式 (b)、(c) 为杆 AB 的角速度 $\dot{\varphi}$ 及角加速度 $\ddot{\varphi}$ 与角 φ 之间的关系式。当 $\varphi = 60^\circ$ 时得：

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{3v}{4l}, \quad \alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

两种求解表明结果相同。

此题中，杆 AB 作平面运动， AB 上与 O 相重合一点的速度应沿杆 AB 方向。因此，也可应用瞬心法求解杆 AB 的角速度。然而，用平面运动基点法求解杆 AB 的角加速度就不如前两种方法方便了。

例 9-12：图 9-27 (a) 所示平面机构。 AB 长为 l ，滑块 A 可沿摇杆 OC 的长槽滑动。摇杆 OC 以匀角速度 ω 绕 O 转动，滑块 B 以匀速 $v = \omega l$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时 OC 铅直， AB 与水平线 OB 夹角为 30° 。求此瞬时 AB 杆的角速度及角加速度。

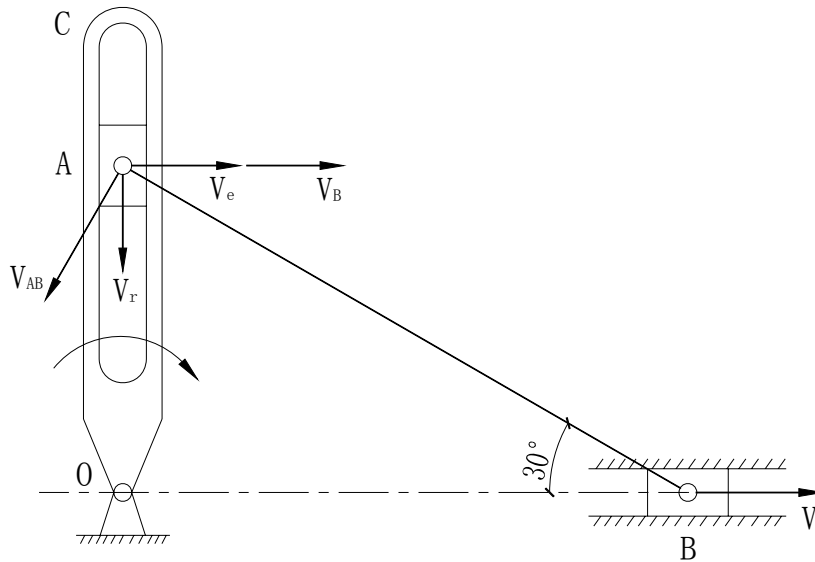


图 9-27

解：杆 AB 作平面运动， A 点又在摇杆 OC 内有相对运动。这是一种应用平面运动和点的合成运动理论联合求解的问题。而且是一种含两个运动输入量 ω 和 v 的较复杂机构运动问题。

杆 AB 作平面运动，以 B 为基点，则：

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB} \quad (a)$$

A 点在杆 OC 内滑动，利用点的合成运动分析方法，取 A 点为动点，动系固结在 OC 上。则：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (b)$$

其中绝对速度 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A$ 。而牵连速度 $\mathbf{v}_e = OA \times \omega = \frac{l\omega}{2}$ ，相对速度 \mathbf{v}_r 大小未知，各速度矢量方向如图 9-27 所示。

由式 (a)、(b) 式得：

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (c)$$

式中 $\mathbf{v}_B = v$ 为已知； \mathbf{v}_e 已确定；且 \mathbf{v}_{AB} 和 \mathbf{v}_r 方向已知；仅有 \mathbf{v}_{AB} 及 \mathbf{v}_r 两个量的大小未知。故

可利用两个投影方程求解。将 (c) 式沿 \mathbf{v}_B 方向投影得：

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{AB} \sin 30^\circ = v_e$$

$$\mathbf{v}_{AB} = 2(\mathbf{v}_B - v_e) = \omega l$$

AB 杆的角速度方向如图 9-27 所示，其大小为：

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{AB} = \omega$$

将式 (c) 沿 \mathbf{v}_r 方向投影得：

$$\mathbf{v}_{AB} \cos 30^\circ = v_r$$

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega l$$

以 B 为基点，则 A 点的加速度矢量为：

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^\tau + \mathbf{a}_{AB}^n \quad (d)$$

由于 \mathbf{v}_B 为常量矢量，所以 $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ ，而：

$$\mathbf{a}_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \times AB = \omega^2 l$$

取 A 点为动点，动系固结于 OC 上，则有：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (e)$$

式中

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_A$$

$$\mathbf{a}_e^\tau = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_e^n = \omega^2 \times OA = \frac{\omega^2 l}{2}$$

$$\mathbf{a}_C = 2\omega v_r = \sqrt{3}\omega^2 l$$

由 (d)、(e) 两式得：

$$\mathbf{a}_{AB}^\tau + \mathbf{a}_{AB}^n = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (f)$$

其中各矢量方向已知，如图 9-28 所示。二未知量为 \mathbf{a}_r 及 \mathbf{a}_{AB}^τ 的大小。取投影轴垂直于 \mathbf{a}_r ，且沿 \mathbf{a}_C 方向。将矢量方程式 (f) 在此轴上投影得：

$$\mathbf{a}_{AB}^\tau \sin 30^\circ - \mathbf{a}_{AB}^n \cos 30^\circ = \mathbf{a}_C$$

$$a_{AB}^{\tau} = 3\sqrt{3}\omega^2 l$$

由此得 AB 杆的角加速度为：

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^{\tau}}{AB} = 3\sqrt{3}\omega l$$

方向如图 9-28 所示。

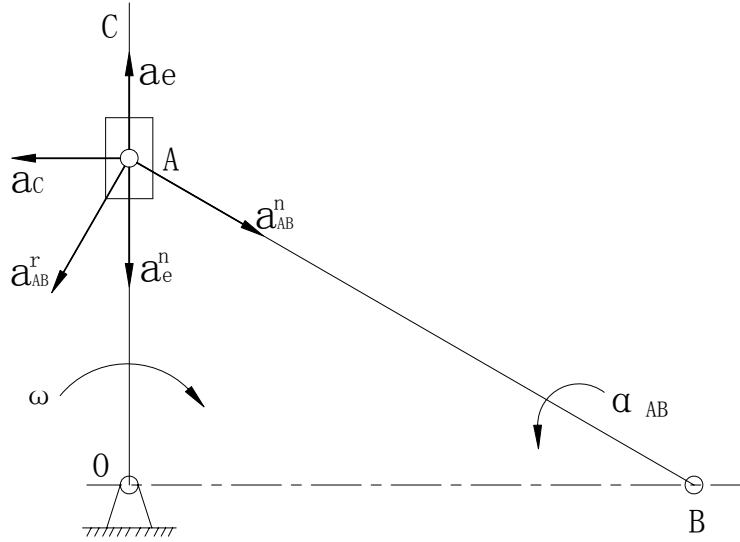


图 9-28

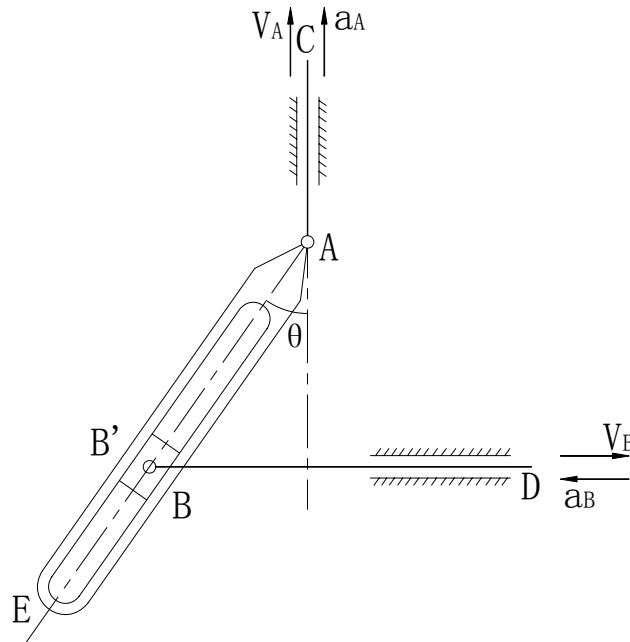


图 9-29

例 9-13: 在图 9-28 所示平面机构中。杆 AC 铅直运动; 杆 BD 水平运动; A 为铰链; 滑块 B 可沿槽杆 AE 中的直槽滑动。图 9-28 所示瞬时, $AB = 60\text{mm}$, $\theta = 30^\circ$, $v_A = 10\sqrt{3}\text{ mm/s}$, $a_A = 10\sqrt{3}\text{ mm/s}^2$, $v_B = 50\text{mm/s}$, $a_B = 10\text{mm/s}$ 。试求该瞬时槽杆 AE 的角速度及角加速度。

解: 以滑块 B 为动点, 动系固结在槽杆 AE 上, 则:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (a)$$

式中 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_B$; \mathbf{v}_r 方向沿 AE , 大小未知; \mathbf{v}_e 为槽杆 AE 上与滑块 B 重合的 B' 点的速度, $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{B'}$, 其大小和方向均未知。式 (a) 的两个投影方程无法完全求解三个待求量。因此必须进行其他构件的平面运动分析。

槽杆 AE 作平面运动, 以 A 为基点, B' 点的速度为:

$$\mathbf{v}_{B'} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B'A} \quad (b)$$

式中 \mathbf{v}_A 已知; $\mathbf{v}_{B'A}$ 方向垂直于 AE , 大小未知; $\mathbf{v}_{B'}$ 大小、方向均未知。式 (b) 的两个投影方程同样无法完全求解三个待求量。由于 $\mathbf{v}_{B'} = \mathbf{v}_e$, 因此将 (a)、(b) 两式联立即可求解。将式 (b) 代入式 (a) 得:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B'A} + \mathbf{v}_r \quad (c)$$

式中只有 $\mathbf{v}_{B'A}$ 及 \mathbf{v}_r 两个量的大小未知。利用 (c) 式的两个投影方程可完全确定 $\mathbf{v}_{B'A}$ 及 \mathbf{v}_r 两个量的大小。各速度矢量如图 9-30 (a) 所示。将式 (c) 分别投影到图中 $\mathbf{v}_{B'A}$ 及 \mathbf{v}_r 方向得:

$$v_B \cos 30^\circ = -v_A \cos 60^\circ + v_{B'A}$$

$$v_B \sin 30^\circ = v_A \sin 60^\circ + v_r$$

解之得:

$$v_{B'A} = 30\sqrt{3}\text{ mm/s}$$

$$v_r = 10\text{ mm/s}$$

从而得槽杆 AE 的角速度为:

$$\omega_{AE} = \frac{v_{B'A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\text{ rad/s}$$

其方向如图 9-30 (a) 所示。

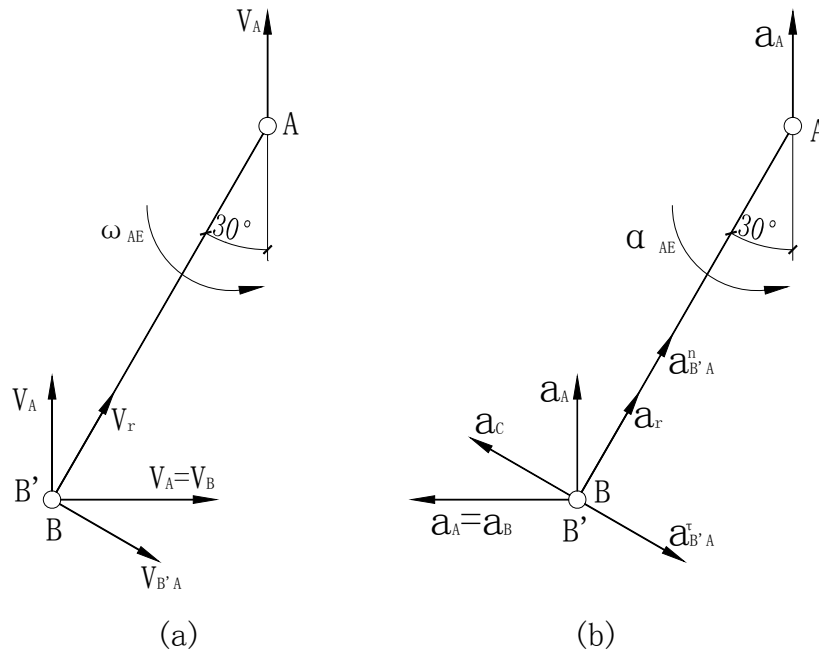


图 9-30

选用与上面相同的动点、动系，由点的合成运动加速度合成定理有：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (d)$$

式中 $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_B$ ； \mathbf{a}_e 为槽杆 AE 上与滑块 B 重合的 B' 点的加速度， $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{B'}$ ，其大小和方向均未知； \mathbf{a}_r 方向沿 AE ，大小未知； $\mathbf{a}_C = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r$ ，方向如图 9-30 (b) 所，其大小为：

$$a_C = 2\omega_{AE}v_r = 10\sqrt{3} = 17.32 \text{ mm/s}^2$$

式 (d) 的两个投影方程无法完全求解三个待求量，因此必须进行其他构件的平面运动分析。

槽杆 AE 作平面运动，以 A 为基点，则：

$$\mathbf{a}_{B'} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B'A}^r + \mathbf{a}_{B'A}^n \quad (e)$$

式中
$$a_{B'A}^n = \omega_{AE}^2 \times AB = 45 \text{ mm/s}^2$$

由于 $\mathbf{a}_{B'} = \mathbf{a}_e$ ，将式 (e) 代入式 (d) 得：

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B'A}^r + \mathbf{a}_{B'A}^n + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (f)$$

各加速度矢量如图 9-30 (b) 所示。式 (f) 中只有 $\mathbf{a}_{B'A}^r$ 及 \mathbf{a}_r 两个加速度的大小未知，可以

通过 (f) 式的两个投影方程完全确定。将式 (f) 分别投影到 $\mathbf{a}_{B'A}^{\tau}$ 及 \mathbf{a}_r 两个方向上得:

$$-a_B \cos 30^\circ = -a_A \sin 30^\circ + a_{B'A}^{\tau} - a_C$$

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A \cos 30^\circ + a_{B'A}^n + a_r$$

解之得:

$$a_{B'A}^{\tau} = 17.32 \text{ mm/s}^2, \quad a_r = -65 \text{ mm/s}^2$$

槽杆 AE 的角加速度为:

$$\alpha_{AE} = \frac{a_{B'A}^{\tau}}{AB} = 0.2887 \text{ rad/s}^2$$

其方向如图 9-30 (b) 所示。

从上面的例题可以看出: 某些问题可以用多种方法求解, 某些问题又必须同时采用几种方法联合求解。解题时应该注意, 只有已知条件适用于运动全过程时, 才能建立点的运动方程, 进行微积分运算, 用解析法求解。在例 9-11 中杆 AC 以匀速 \mathbf{v} 平动是适用于运动全过程的条件, 因此无法用运动方程及微积分方法求解。例 9-13 所给的已知条件是图示瞬时的, 不是全过程的, 因此无法用运动方程及微积分方法求解。例 9-12 所给条件也适用于全过程, 因此也可以用点的运动学方法求解, 读者可自行求解。