

高层建筑结构设计




第7章 框架-剪力墙结构设计



西安建筑科技大学

史庆轩

主要内容:

- 7.1 结构布置
-  7.2 基本假定与计算简图
-  7.3 框架-剪力墙铰结体系结构分析
-  7.4 框架-剪力墙刚结体系结构分析
- 7.5 框架-剪力墙结构内力计算步骤及计算实例

重点、难点: 

7.1 结构布置

- 1) 总体平面布置、竖向布置及变形缝设置等见前述;
- 2) 具体布置除符合下述规定外,其框架和剪力墙的布置应分别符合框架结构和剪力墙结构的有关规定。

7.1.1 基本要求

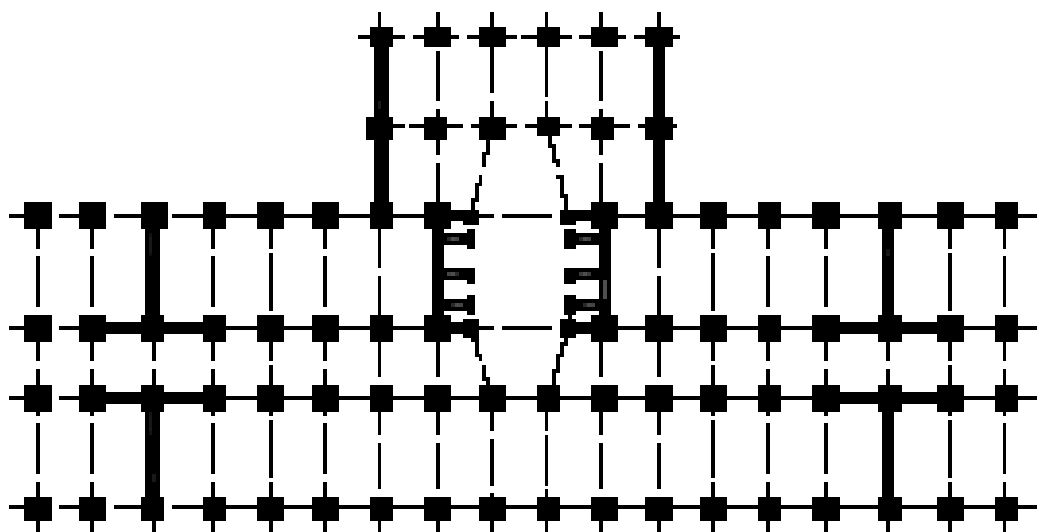
1、双向抗侧力体系

- 1) 框架-剪力墙结构中,框架与剪力墙协同工作共同抵抗水平荷载,其中**剪力墙是结构的主要抗侧力构件**。
- 2) 为使框-剪结构在两个主轴方向均具有必需的水平承载力和侧向刚度,**应在两个主轴方向均匀布置剪力墙,形成双向抗侧力体系**。否则,将造成两个主轴方向结构的水平承载力和侧向刚度相差悬殊,可能使结构整体扭转,对结构抗震不利。

2、节点刚性连接与构件对中布置

1) 在框-剪结构中，为保证结构的整体刚度和几何不变性，及大震作用下的稳定性，需增加其赘余约束，主体结构构件间的连接（节点）应采用刚接。

2) 梁与柱或柱与剪力墙的中心线宜重合，以使内力传递和分布合理，保证节点核心区的完整性。



7.1.2 框架-剪力墙结构中剪力墙的布置

1、剪力墙的数量

- 1) 在框-剪结构中，结构的侧向刚度主要由同方向各片剪力墙弯曲刚度的总和 $E_c I_w$ 控制，水平位移随 $E_c I_w$ 增大而减小。
- 2) 剪力墙数量也不宜过多，否则地震作用相应增加，还会使绝大部分水平地震力被剪力墙吸收，框架的作用不能充分发挥，既不合理也不经济。
- 3) 一般以满足结构的水平位移限值作为设置剪力墙数量的依据较为合适。
- 4) 抗震设计时，框架部分承受的地震倾覆力矩大于总地震倾覆力矩的50%时，说明剪力墙数量偏少，其受力性能与框架结构相当，宜适当增加剪力墙数量。若不增加剪力墙数量，其框架抗震等级和柱轴压比限值应按框架结构采用。

2、剪力墙的布置

(1) 剪力墙宜均匀布置在建筑物的周边、楼梯间、电梯间、平面形状或恒载变化较大的部位；剪力墙间距不宜过大；平面形状凹凸较大时，宜在凸出部分的端部附近布置剪力墙。

(2) 纵、横向剪力墙宜组成 L 形、T 形和 U 形等，以使纵（横）墙作为横（纵）墙的翼缘。

(3) 剪力墙布置不宜过分集中，单片剪力墙承担的水平剪力不宜超过底部总剪力的40%，以免结构的刚度中心与质量中心偏离过大、墙截面配筋过多以及不合理的设计。当剪力墙墙肢截面高度过大时，可用门窗洞口或施工洞形成联肢墙。

(4) 框架-剪力墙结构中的楼面结构是框架和剪力墙能协同工作的基础，应优先采用现浇楼面。

(5) 剪力墙宜贯通建筑物全高，避免刚度突变；剪力墙洞口宜上、下对齐。抗震设计时，剪力墙的布置宜使结构各主轴方向的侧向刚度接近。

(6) 保证框架与剪力墙协同工作，横向剪力墙沿房屋长方向的间距宜满足下表的要求；当剪力墙之间的楼盖有较大开洞时，剪力墙的间距应适当减小；纵向剪力墙不宜集中布置在房屋的两尽端。

表 7.1.1 剪力墙的间距限值(m)

楼面形式	非抗震设计 (取较小值)	抗震设防烈度 (取较小值)		
		6度, 7度	8度	9度
现 浇	5.0B, 60	4.0B, 50	3.0B, 40	2.0B, 30
装配整体	3.5B, 50	3.0B, 40	2.5B, 30	—

7.1.3 板柱-剪力墙结构的布置

(1) 板柱-剪力墙结构中的板柱框架比梁柱框架更弱，高层板柱-剪力墙结构应布置成双向抗侧力体系，两主轴方向均应设置剪力墙。

(2) 抗震设计时，房屋的周边应设置框架梁，房屋的顶层及地下室一层顶板宜采用梁板结构。当楼板有较大开洞（如楼、电梯间等）时，洞口周边宜设置框架梁或边梁。

(3) 板柱-剪力墙结构与框架-剪力墙结构中剪力墙的布置要求相同。

7.1.4 梁、柱截面尺寸及剪力墙数量的初步拟定

1、梁、柱截面尺寸

梁截面尺寸一般根据工程经验确定，柱截面尺寸可根据轴压比要求确定。

2、剪力墙数量的粗估

1) 剪力墙数量不宜多，也不宜少，需要确定合适的剪力墙数量。震害表明，剪力墙多，震害较轻。

2) 在初步设计阶段，可根据底层剪力墙、柱截面面积 A_w 、 A_c 与楼面面积 A_f 的比值，来粗估剪力墙的数量。

表 7.1.2 底层剪力墙（柱）截面面积与楼面面积的比值

设计条件	$(A_w + A_c) / A_f$	A_w / A_f
7度, II类场地	3% ~ 5%	2% ~ 3%
8度, II类场地	4% ~ 6%	3% ~ 4%

3、剪力墙数量的简化方法

结构地震反应的强弱与自振周期有关。自振周期长，地震作用小；自振周期短，地震作用大。当刚度已满足层间侧移限值的情况下，多设置墙反而会加大地震反应。故设置的剪力墙恰好满足变形限值为剪力墙的最佳刚度。

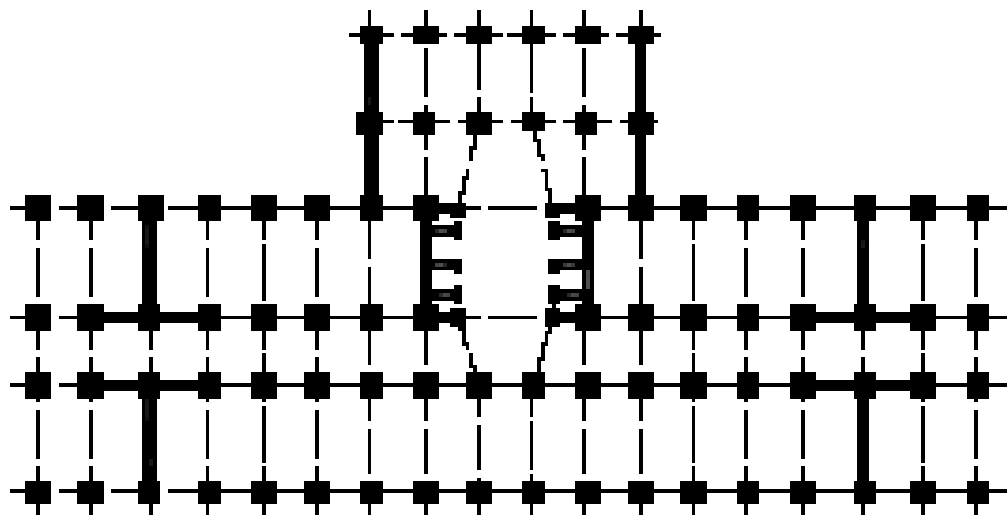
按照上述原则，可根据框架的刚度、侧移变形限值、设防烈度、场地类别、重力荷载代表值等，可求得剪力墙的最佳刚度，具体方法详见一些手册和论文。

7.2 基本假定与计算简图

7.2.1 框架与剪力墙的协同工作

1、定义：

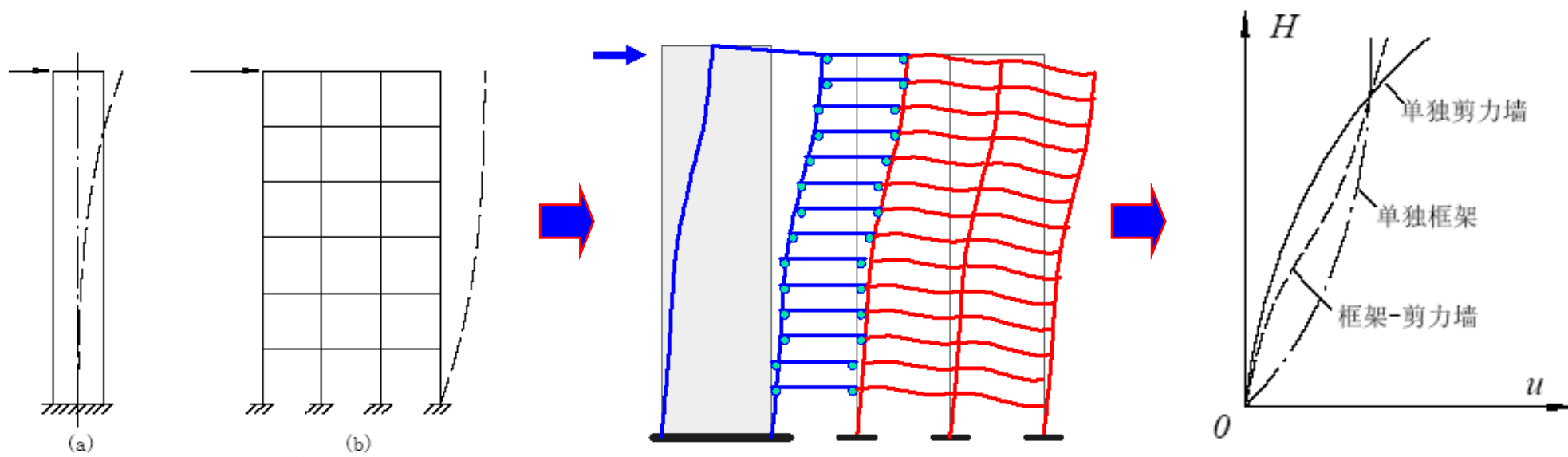
框架-剪力墙结构是由框架和剪力墙组成的结构体系。在水平荷载作用下，平面内刚度很大的楼盖将二者连接在一起组成框-剪结构时，二者之间存在协同工作问题。



2、特点：

1) 在水平荷载下，单独剪力墙的变形曲线以弯曲变形为主；单独框架的变形曲线以整体剪切变形为主。

2) 在框-剪结构中，其变形曲线介于弯曲型与整体剪切型之间。在下部，剪力墙的位移比框架小，墙将框架向左拉，框架将墙向右拉，即框架“帮”剪力墙；在上部，剪力墙的位移比框架大，框架将墙向左推，墙将框架向右推，即剪力墙“帮”框架。



2、特点:

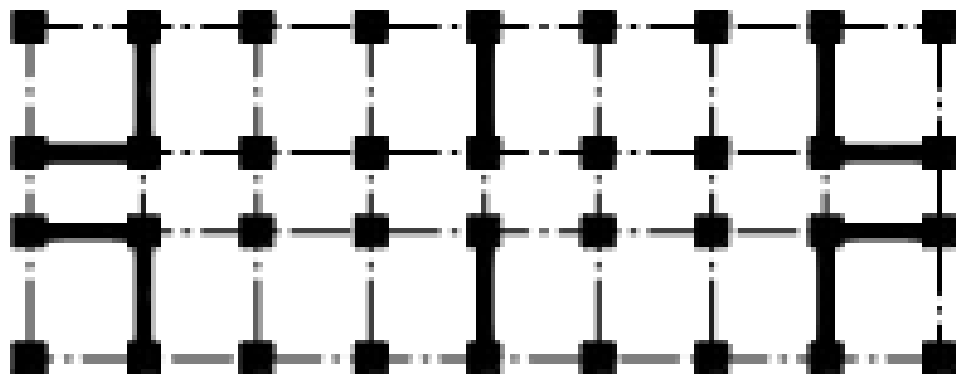
3) 框-剪结构协同工作的特点使得框架和剪力墙能充分发挥各自的作用（框架主要承受竖向荷载，剪力墙主要承受水平荷载），从而充分体现出这种结构体系的优越性。

4) 二者之间存在协同工作使框架-剪力墙结构的侧移大大减小，内力分布更趋合理。

7.2.2 基本假定与计算简图

1、基本假定：

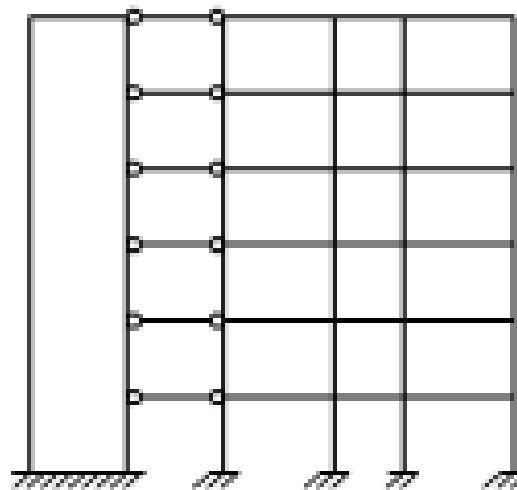
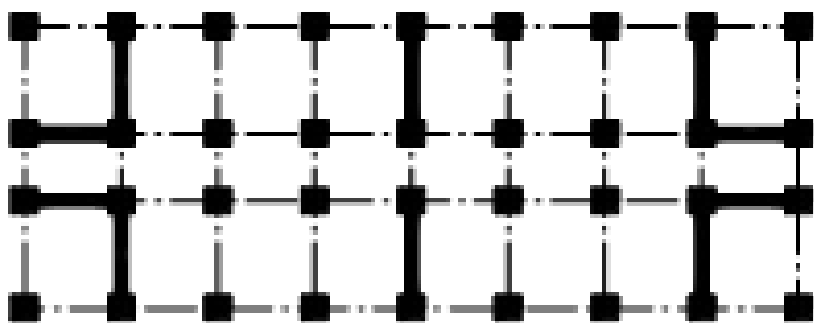
- 1) 楼板在自身平面内的刚度为无限大。这保证了楼板将整个结构单元内的所有框架和剪力墙连为整体，不产生相对变形。
- 2) 房屋的刚度中心与作用在结构上的水平荷载的合力作用点重合，在水平荷载作用下房屋不产生绕竖轴的扭转。



在这两个基本假定的前提下，同一楼层标高处，各榀框架和剪力墙的水平位移相等。因此，可将结构单元内所有剪力墙综合在一起，形成一榀假想的**总剪力墙**，总剪力墙的弯曲刚度等于各榀剪力墙弯曲刚度之和；把结构单元内所有框架综合起来，形成一榀假想的**总框架**，总框架的剪切刚度等于各榀框架剪切刚度之和。

$$E_c I_{eq} = \sum (E_c I_{eq})_j$$

$$C_{ff} = Dh = h \sum D_{ij}$$



2、计算模型

1) 分类:

按照剪力墙之间和剪力墙与框架之间有无连梁，或者是否考虑这些连梁对剪力墙转动的约束作用，将框-剪结构分为：**框架-剪力墙铰结体系、框架-剪力墙刚结体系。**

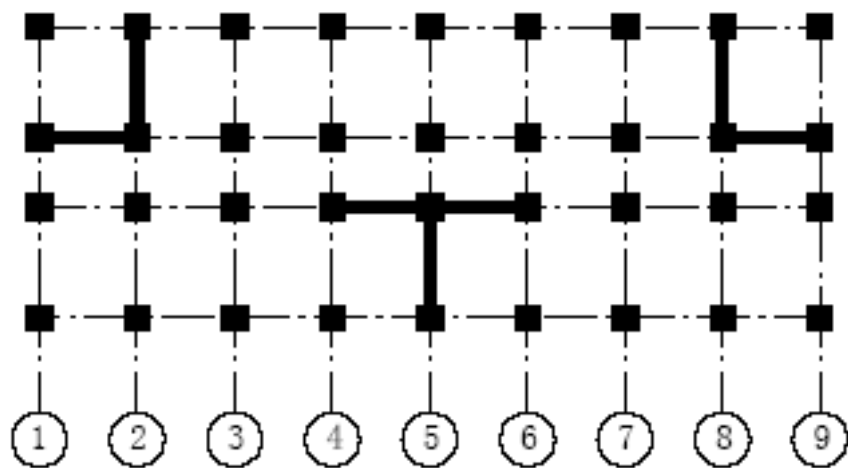
2) 特点:

(1) 框架-剪力墙铰结体系

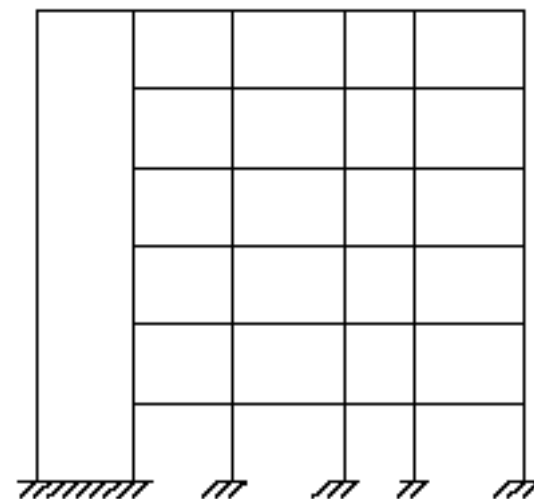
对图示结构单元平面，如沿房屋横向的3榀剪力墙均为双肢墙，因连梁的转动约束作用已考虑在双肢墙的刚度内，**则总框架与总剪力墙之间可按铰结考虑。连梁是刚性的(即 $EA \rightarrow \infty$)，反映了刚性楼板的假定，保证总框架与总剪力墙在同一楼层标高处的水平位移相等。**

(2) 框架-剪力墙刚结体系

对图示结构单元平面，沿房屋横向有3片剪力墙，剪力墙与框架之间有连梁连结，**当考虑连梁的转动约束作用时，连梁两端可按刚结考虑**，其横向计算简图如图。总连梁代表②⑤⑧轴线3列连梁的综合。



(a)

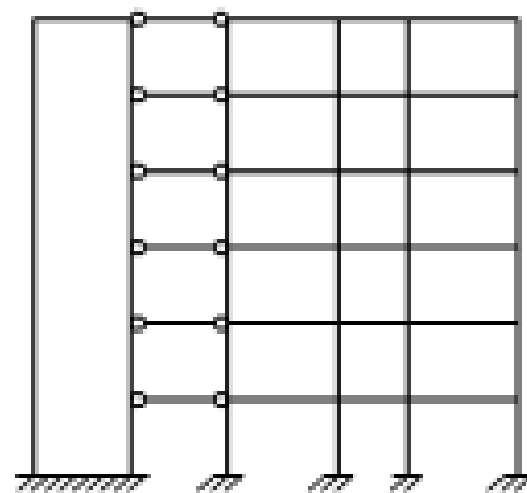
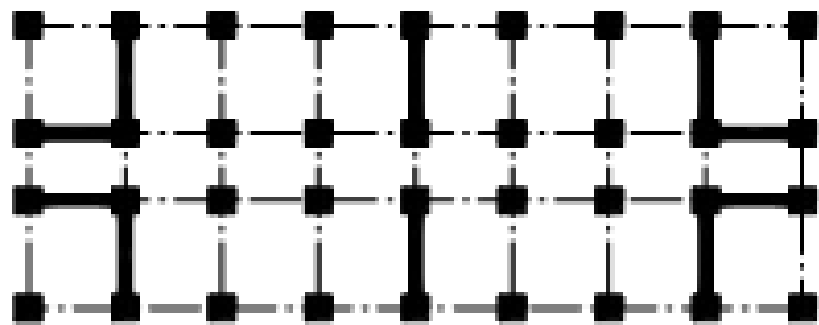


(b)

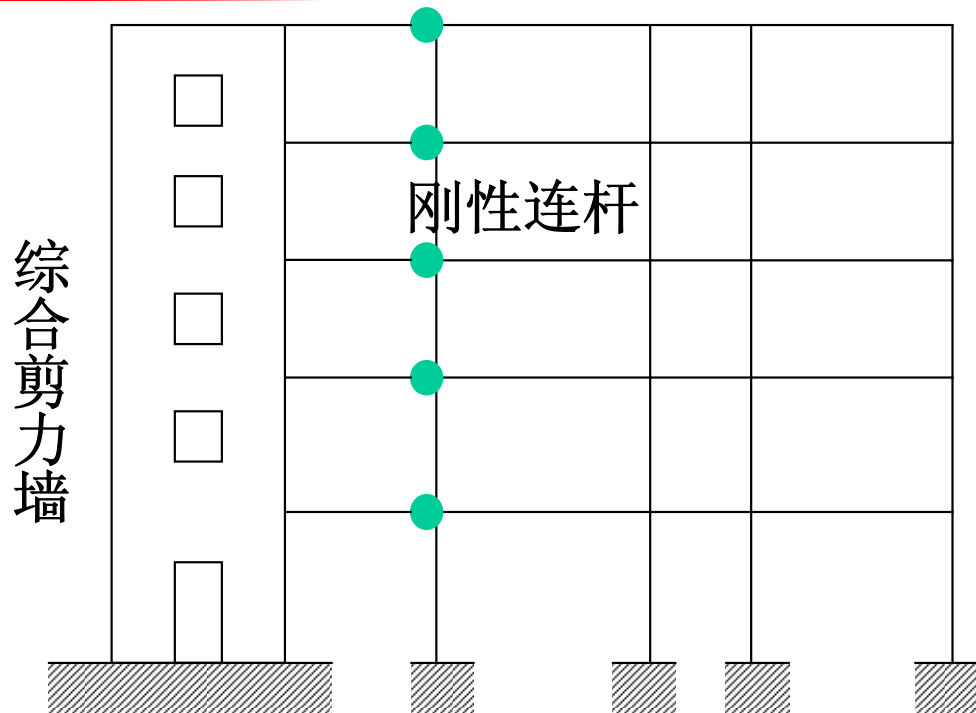
框架-剪力墙刚结体系 (横向、纵向)

对于图示的结构布置情况，当考虑连梁的转动约束作用时，其纵向计算简图均可按刚结体系考虑。

框-剪结构的下端为固定端，一般取至基础顶面；当设置地下室，且地下室楼层侧向刚度不小于相邻上部结构楼层侧向刚度的2倍时，可将地下室的顶板作为上部结构嵌固部位。



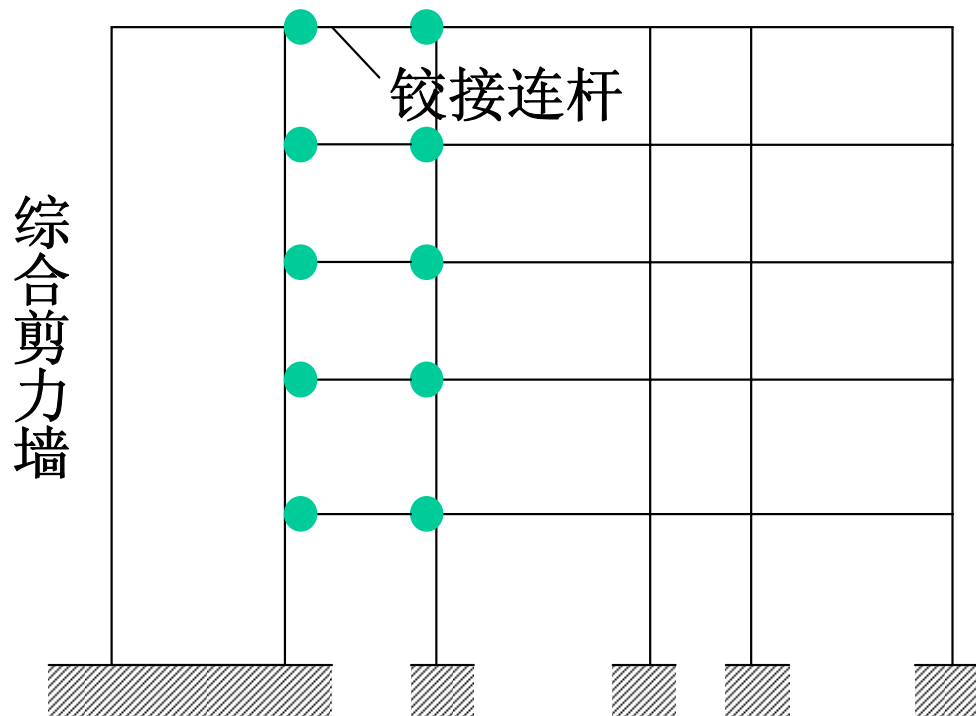
框架-剪力墙铰结体系(纵向)



综合框架

刚结体系——

当连梁的刚度较大时



综合框架

铰结体系——

当连梁的刚度较小；
或连梁的转动约束作用已考虑在双肢墙的
刚度内时

7.2.3 基本计算参数

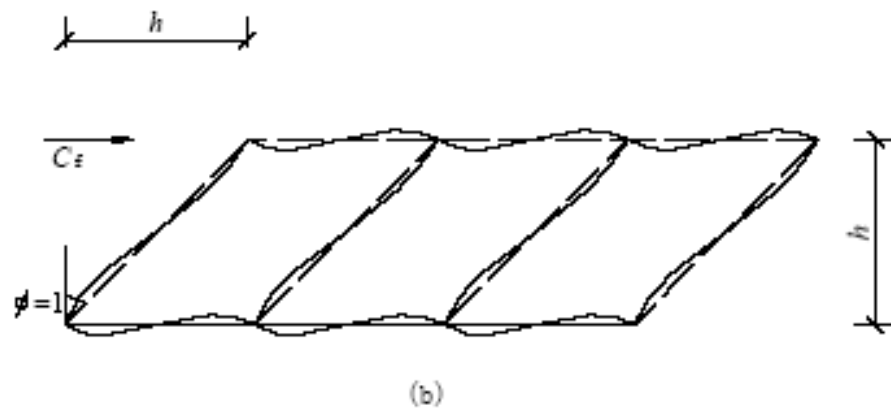
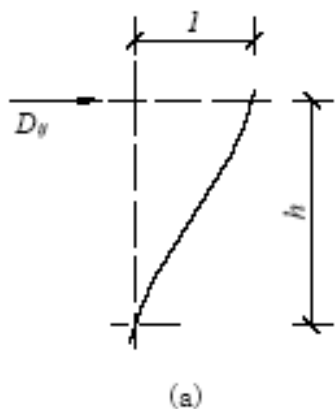
框-剪结构分析时，需确定总剪力墙的弯曲刚度、总框架的剪切刚度和总连梁的等效剪切刚度。

1、总框架的剪切刚度

1) 定义：

框架柱的侧向刚度 D ：使框架柱两端产生单位相对侧移所需施加的水平剪力；

总框架的剪切刚度 C_f ：使总框架在楼层间产生单位剪切变形（ $\phi=1$ ）所需施加的水平剪力。



2) 总框架的剪切刚度

$$C_{fi} = Dh = h \sum D_{ij}$$

D_{ij} 为第 i 层第 j 根柱的侧向刚度； D 为同一层内所有框架柱的 D_{ij} 之和； h 为层高。

当各层 C_{fi} 不相同，计算中所用的 C_f 可近似地以各层的 C_{fi} 按高度加权取平均值，即

$$C_f = \frac{C_{f_1} h_1 + C_{f_2} h_2 + \cdots + C_{f_n} h_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$$

3) 考虑柱轴向变形时框架的剪切刚度

框架剪切刚度的定义

$$V_f = C_f \phi = C_f \frac{dy}{dz}$$

将上式对 z 微分一次，得

$$-q_f(z) = \frac{dV_f}{dz} = C_f \frac{d^2y}{dz^2}$$

式中， $q_f(z)$ 为框架所承受的分布水平力； V_f 以及 $q_f(z)$ 以自左向右为正。

将上式积分两次，得

$$y = -\frac{I}{C_f} \left[\int_0^z \int_z^H q_f(z) dz dz \right]$$

框架顶点的侧移为

$$u_M = [y]_{z=H} = -\frac{I}{C_f} \left[\int_0^z \int_z^H q_f(z) dz dz \right]_{z=H}$$

或者写成

$$C_f = -\frac{I}{u_M} \left[\int_0^z \int_z^H q_f(z) dz dz \right]_{z=H}$$

比照上式，可定义考虑柱轴向变形后框架的剪切刚度

$$C_{f0} = -\frac{I}{u_N + u_M} \left[\int_0^z \int_z^H q_f(z) dz dz \right]_{z=H}$$

$$C_{f0} = \frac{u_M}{u_N + u_M} C_f$$

u_M 为仅考虑梁、柱弯曲变形时框架的顶点侧移，可用D值法计算； u_N 为柱轴向变形引起的框架顶点侧移。

2、连梁的约束刚度

框-剪刚结体系的连梁进入墙的部分刚度很大，因此连梁应作为带刚域的梁进行分析。剪力墙间的连梁是两端带刚域的梁，剪力墙与框架间的连梁是一端带刚域的梁。

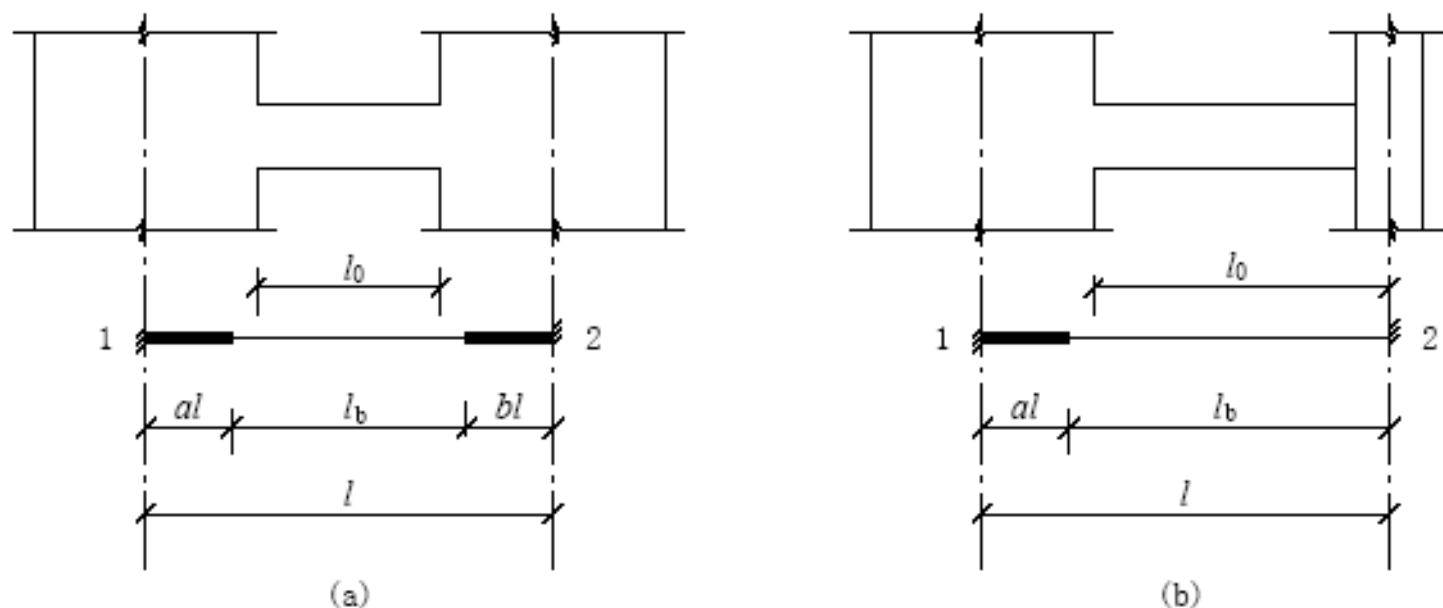
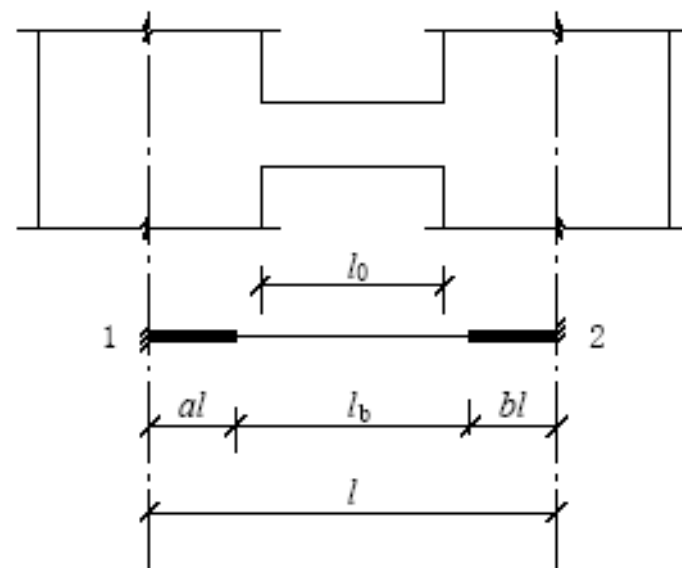


图 7.2.6 连梁的计算简图

1) 两端带刚域的连接梁

在水平荷载下，根据刚性楼板假定，同层框架与剪力墙的水平位移相同，同时假定同层所有结点的转角 θ 也相同，则可得两端带刚域连梁的杆端转动刚度：

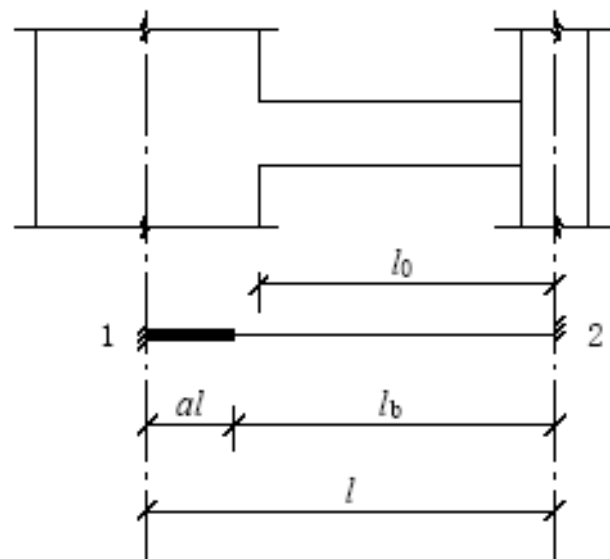
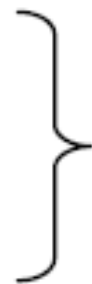
$$\left. \begin{aligned} S_{12} &= \frac{6EI_0}{l} \frac{1+a-b}{(1-a-b)^3(1+\beta)} \\ S_{21} &= \frac{6EI_0}{l} \frac{1-a+b}{(1-a-b)^3(1+\beta)} \end{aligned} \right\}$$



2) 一端带刚域的连梁

在上式中令 $b=0$ ，可得一端带刚域连梁的杆端转动刚度

$$S_{12} = \frac{6EI_0}{l} \frac{1+a}{(1-a)^3(1+\beta)}$$
$$S_{21} = \frac{6EI_0}{l} \frac{1}{(1-a)^2(1+\beta)}$$



3) 连梁的线约束刚度

当采用连续化方法计算时，应将 S_{12} 和 S_{21} 化为沿层高 h 的线约束刚度 C_{12} 和 C_{21} ，即

$$\left. \begin{aligned} C_{12} &= \frac{S_{12}}{h} \\ C_{21} &= \frac{S_{21}}{h} \end{aligned} \right\}$$

单位高度上连梁两端线约束刚度之和为

$$C_b = C_{12} + C_{21}$$

当第 i 层内有 s 根刚结连梁时，总连梁的线约束刚度为

$$C_{bi} = \sum_{j=1}^s (C_{12} + C_{21})_j$$

当各层总连梁的 C_{bi} 不同时，可近似地按高度取加权平均值

$$C_b = \frac{C_{b_1} h_1 + C_{b_2} h_2 + \cdots + C_{b_n} h_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$$

3、剪力墙的弯曲刚度

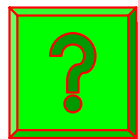
总剪力墙的等效刚度为结构单元内同一方向(横向或纵向)所有剪力墙等效刚度之和, 即

$$E_c I_{eq} = \sum (E_c I_{eq})_j$$

对整截面墙

$$EI_{eq} = \frac{EI_w}{1 + \frac{9\mu I_w}{A_w H^2}}$$

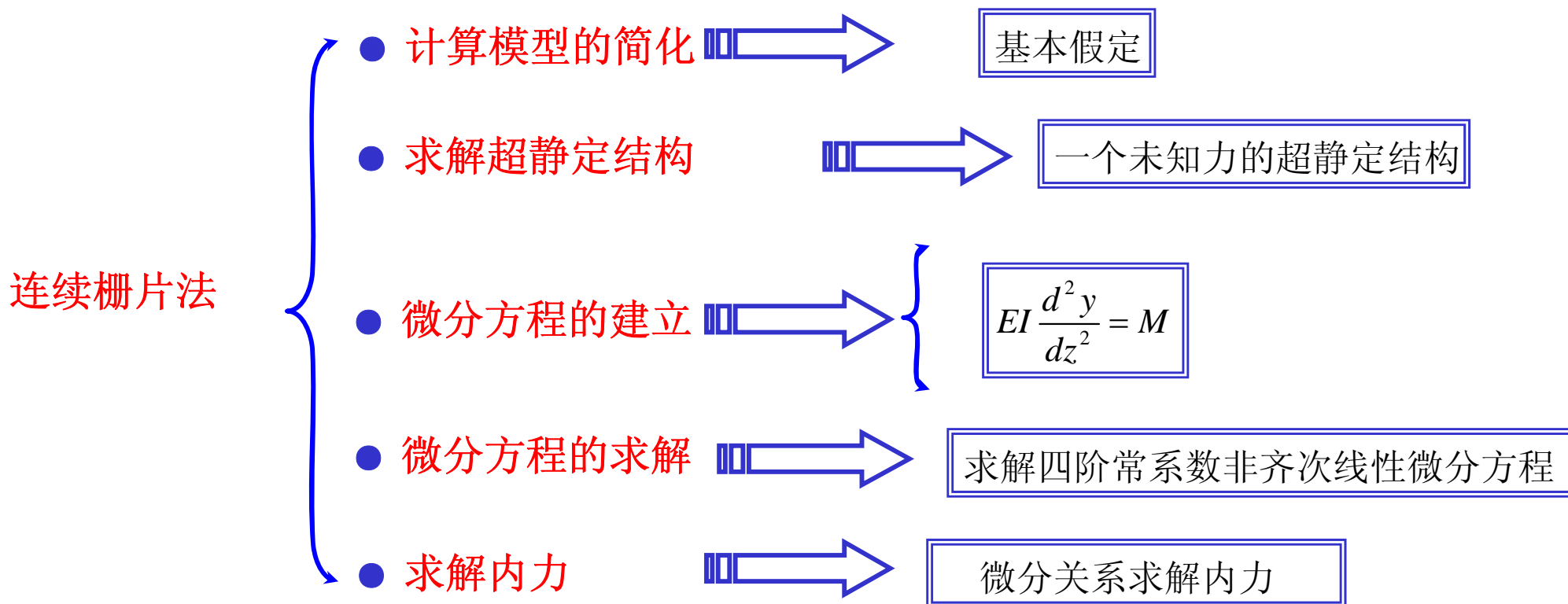
7.3 框架-剪力墙铰结体系结构分析



问题：求解基本思路？

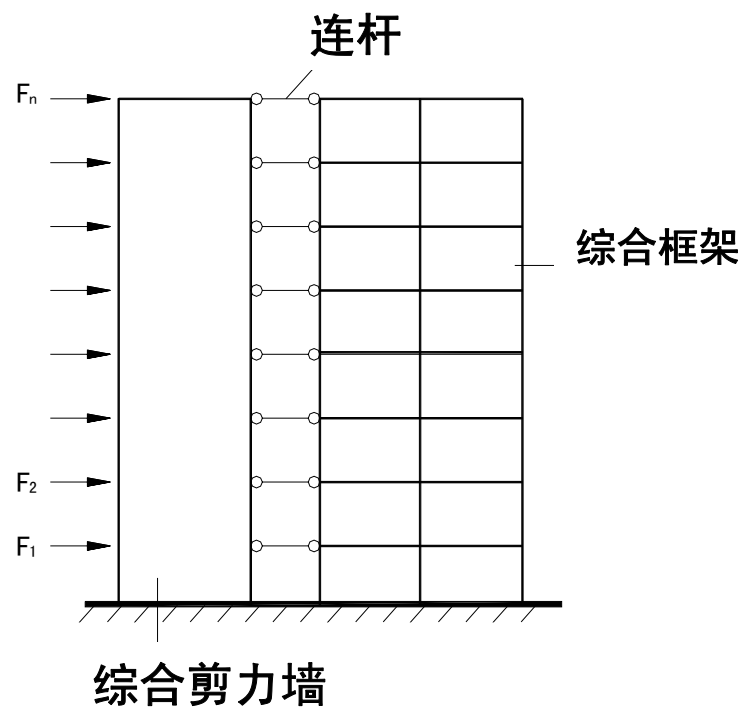
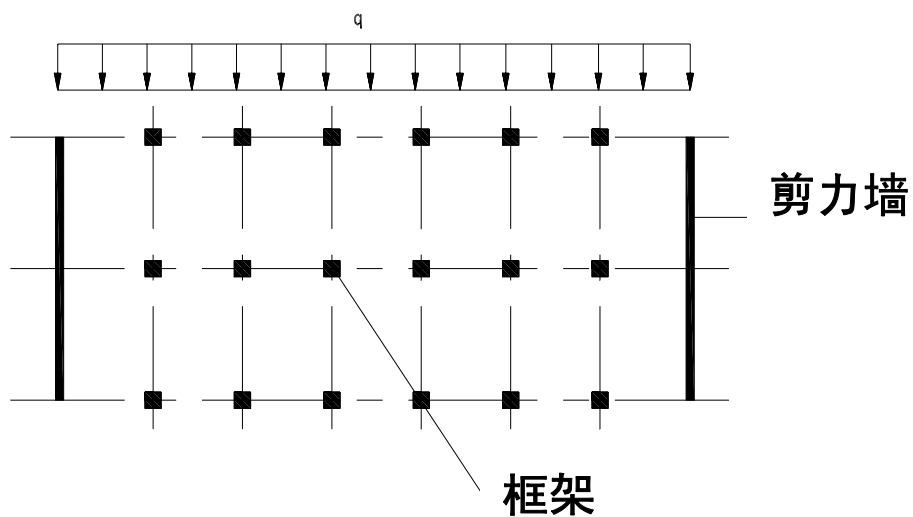
与前述双肢剪力墙的求解方法类似,对框-剪结构仍采用连续化方法——连续栅片法。

连续栅片法是沿结构的竖向采用连续化假定,即把每层的连梁沿层高连续化为连续栅片。这个假定使总剪力墙与总框架不仅在每一楼层标高处具有相同的侧移,而且沿整个高度都有相同的侧移,从而使计算简化到能用微分方程来求解。

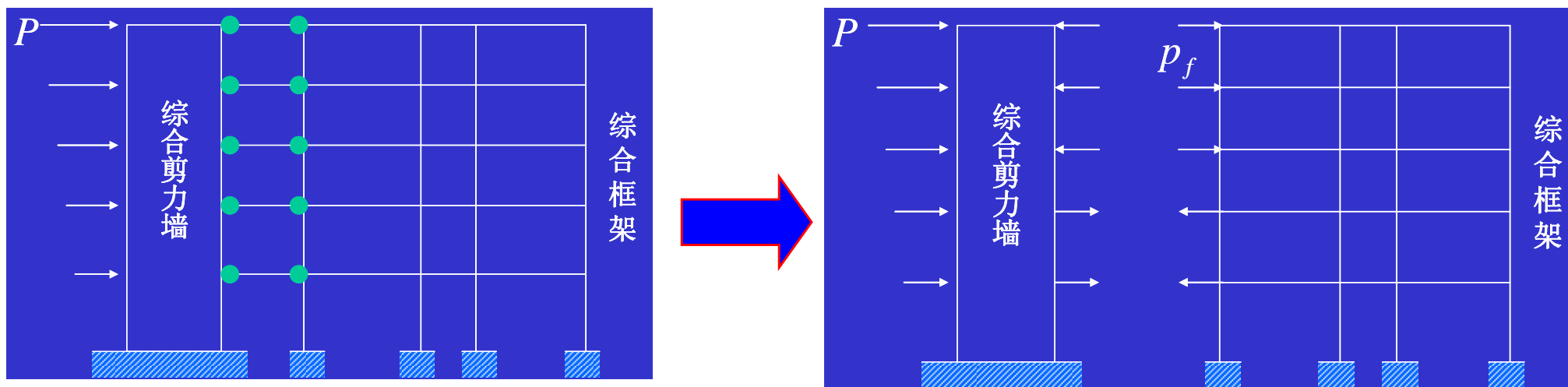


7.3.1 基本假定

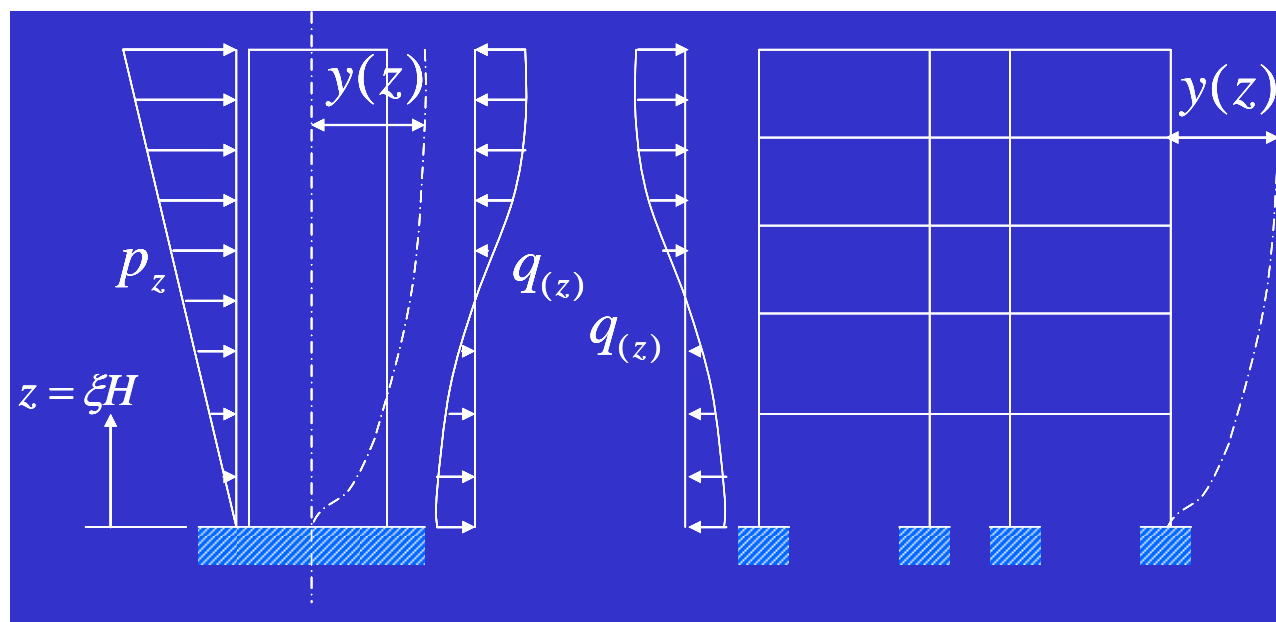
- (1) 楼盖在其自身平面内的抗弯刚度为无限大;
- (2) 房屋在水平荷载作用下不发生扭转。



将连杆用力来代替，可得到如下计算简图



将集中荷载在层高内连续化:



7.3.2 基本方程及其一般解

1、基本方程:

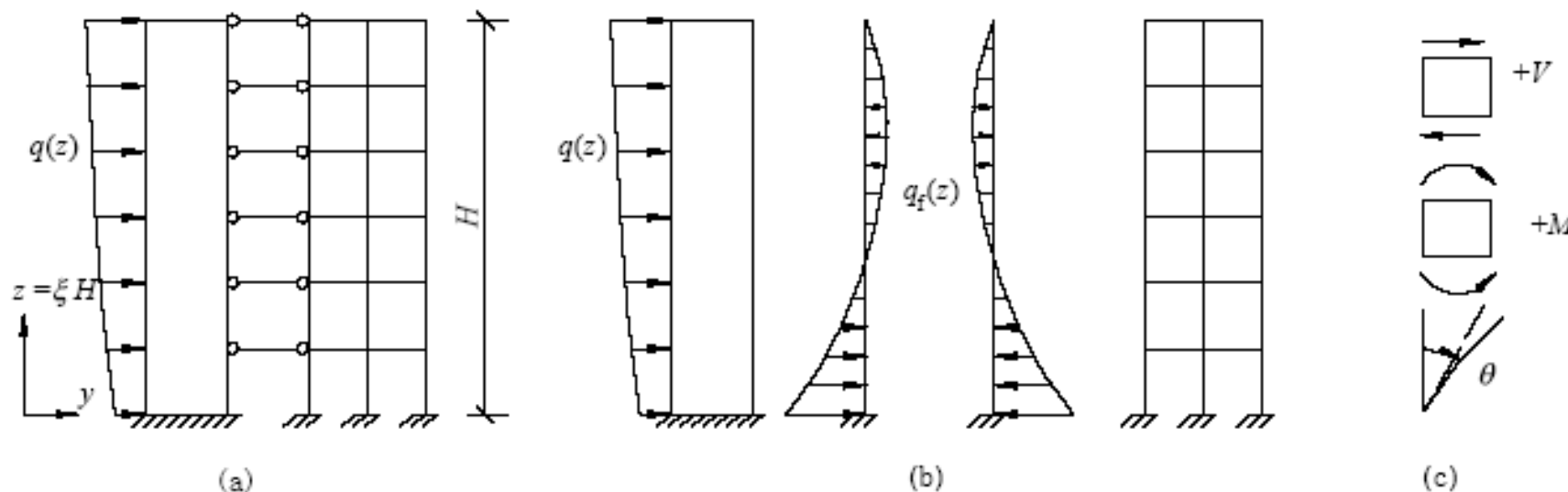


图 7.3.1 框架-剪力墙铰结体系协同工作计算简图

以总剪力墙为隔离体，采用图示的正负号规定，可得如下微分方程

$$E_c I_{eq} \frac{d^4 y}{dz^4} = q(z) - q_f(z)$$

式中， $q_f(z)$ 表示框架与剪力墙的相互作用力，由框架剪切刚度的定义可得：

$$V_f = C_f \phi = C_f \frac{dy}{dz}$$

将上式对 z 微分一次，得

$$-q_f(z) = \frac{dV_f}{dz} = C_f \frac{d^2 y}{dz^2}$$

$q_f(z)$ 为框架所承受的分布水平力， V_f 以及 $q_f(z)$ 以自左向右为正。

$$q_f(z) = -\frac{dV_f}{dz} = -C_f \frac{d^2 y}{dz^2}$$

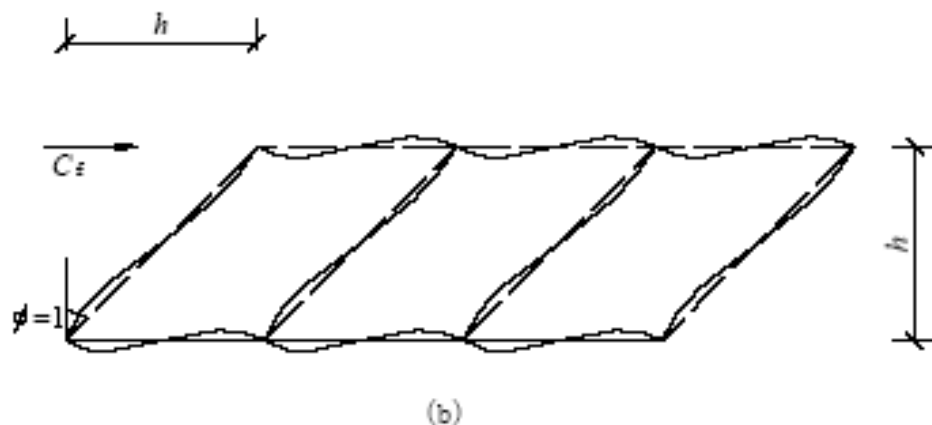


图 7.2.5 框架的剪切刚度

代入微分方程，并引入 $\xi = z/H$ ，则得

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{q(\xi)H^4}{E_c I_{eq}}$$

λ 为框架-剪力墙铰结体系的刚度特征值，类似于剪力墙中的整体工作系数，是一个与框架和剪力墙的刚度比有关的参数，对框架-剪力墙结构的受力和变形特征有重大影响。可按下列式计算：

$$\lambda = H \sqrt{\frac{C_f}{E_c I_{eq}}}$$

2、求解

四阶常系数线性微分方程的一般解为

$$y = C_1 + C_2\xi + C_3\text{sh}\lambda\xi + C_4\text{ch}\lambda\xi + y_1$$

与双肢墙求解类似， C_1 ， C_2 ， C_3 ， C_4 是四个任意常数，由框-剪结构的边界条件确定； y_1 是特解，视具体荷载而定。

位移 y 求出后，框-剪结构转角 θ ，总剪力墙的弯矩、剪力，以及总框架的剪力，可由下列微分关系求得：

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{dy}{dz} = \frac{1}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi} \\ M_w &= E_c I_{\text{eq}} \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{E_c I_{\text{eq}}}{H^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2} \\ V_w &= -E_c I_{\text{eq}} \frac{d^3 y}{dz^3} = -\frac{E_c I_{\text{eq}}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} \\ V_f &= C_f \frac{dy}{dz} = \frac{C_f}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi} \end{aligned} \right\}$$

7.3.3 水平均布荷载作用下内力及侧移计算

1、通解：

均布荷载时， $q(\xi)=q$ ，其特解为

$$y_1 = -\frac{qH^2}{2C_f}\xi^2$$

$$y = C_1 + C_2\xi + C_3\text{sh}\lambda\xi + C_4\text{ch}\lambda\xi - \frac{qH^2}{2C_f}\xi^2$$

2、约束条件：

- ✦ (1) 框架-剪力墙结构顶部总剪力为零，即当 $\xi=1$ （或 $z=H$ ）时， $V=V_w+V_f=0$ 。
- ✦ (2) 剪力墙下端固定，弯曲转角为零，即当 $\xi=0$ 时， $dy/d\xi=0$ 。
- ✦ (3) 在结构顶端，剪力墙的弯矩为零，即当 $\xi=1$ 时，由式(7.3.5)的第2式得 $\frac{d^2y}{d\xi^2}=0$ 。
- ✦ (4) 在结构下端，侧移 y 为零，即当 $\xi=0$ 时， $y=0$ 。



(1) 框架-剪力墙结构顶部总剪力为零, 即当 $\xi = 1$ (或 $z = H$) 时, $V = V_w + V_f = 0$ 。

$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} = -\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3}$$

$$V_f = C_f \frac{dy}{dz} = \frac{C_f}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$

可得

$$\lambda^2 \frac{dy}{d\xi} = \frac{d^3 y}{d\xi^3}$$

将通解y代入, 并令 $\xi = 1$

$$\lambda^2 (C_2 - qH^2/C_f) + \lambda^3 (C_3 \operatorname{ch} \lambda + C_4 \operatorname{sh} \lambda) = \lambda^3 (C_3 \operatorname{ch} \lambda + C_4 \operatorname{sh} \lambda)$$

则

$$C_2 = qH^2/C_f$$



(2) 剪力墙下端固定，弯曲转角为零，即当 $\xi = 0$ 时， $dy/d\xi = 0$ 。

将通解 y 代入，并令 $\xi = 0$ ，可得

$$C_3 = -\frac{C_2}{\lambda} = -\frac{qH^2}{\lambda C_f}$$



(3) 在结构顶端，剪力墙的弯矩为零，即当 $\xi = 1$ 时，由式(7.3.5)的第2式得 $\frac{d^2y}{d\xi^2} = 0$ 。

将通解 y 代入，并令 $\xi = 1$

$$C_3\lambda^2 sh\lambda + C_4\lambda^2 ch\lambda - qH^2 / C_f = 0$$

$$C_4 = \frac{qH^2}{\lambda^2 C_f} \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda} \right)$$



(4) 在结构下端，侧移 y 为零，即当 $\xi = 0$ 时， $y = 0$ 。

$$C_1 = -C_4 = -\frac{qH^2}{\lambda^2 C_f} \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda} \right)$$

3、表达式:

将上述积分常数代入，经整理后得

$$y = \frac{qH^4}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^4} \left[\left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\operatorname{ch} \lambda} \right) (\operatorname{ch} \lambda \xi - 1) - \lambda \operatorname{sh} \lambda \xi + \lambda^2 \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]$$

水平均布荷载下，框-剪结构转角 θ ，总剪力墙的弯矩、剪力，以及总框架的剪力可按下式计算：

$$\theta = \frac{qH^3}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\lambda \operatorname{ch} \lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \xi - \operatorname{ch} \lambda \xi - \xi + 1 \right]$$

$$M_w = \frac{E_c I_{eq}}{H^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{qH^2}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\operatorname{ch} \lambda} \right) \operatorname{ch} \lambda \xi - \lambda \operatorname{sh} \lambda \xi - 1 \right]$$

$$V_w = -\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} = qH \left[\operatorname{ch} \lambda \xi - \left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\lambda \operatorname{ch} \lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \xi \right]$$

$$V_f = \frac{C_f}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi} = qH \left[\left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\lambda \operatorname{ch} \lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \xi - \operatorname{ch} \lambda \xi - \xi + 1 \right]$$

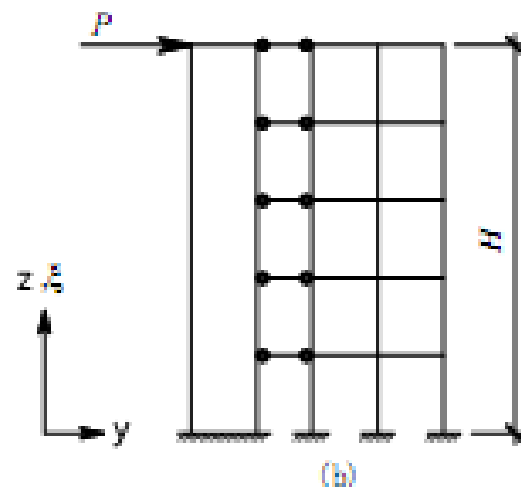
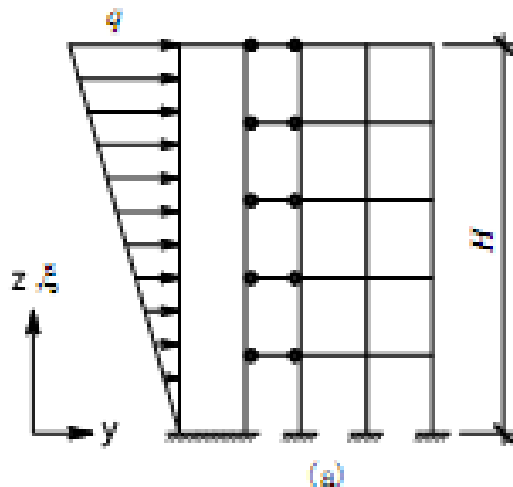
7.3.4 倒三角形分布荷载下内力及侧移计算

水平荷载

$$q(z) = q \frac{z}{H} = q \xi$$

特解

$$y_1 = -\frac{qH^2}{6C_f} \xi^3$$



$$y = C_1 + C_2 \xi + C_3 \operatorname{sh} \lambda \xi + C_4 \operatorname{ch} \lambda \xi - \frac{qH^2}{6C_f} \xi^3$$

根据边界条件，可求得 C_1 ， C_2 ， C_3 ， C_4 四个常数，推导过程如前，略

$$C_2 = \frac{qH^2}{C_f} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \qquad C_3 = -\frac{C_2}{\lambda} = -\frac{qH^2}{\lambda C_f} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$C_4 = \frac{qH^2}{C_f} \cdot \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \right] \qquad C_1 = -C_4 = -\frac{qH^2}{C_f} \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \right]$$

$$y = \frac{qH^4}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\operatorname{sh} \lambda}{2\lambda} - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\lambda^3} \right) \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda \xi - 1}{\operatorname{ch} \lambda} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\xi - \frac{\operatorname{sh} \lambda \xi}{\lambda} \right) - \frac{\xi^3}{6} \right]$$

$$\theta = \frac{1}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi} = \frac{qH^3}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh} \lambda}{2} - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\lambda^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda \xi}{\operatorname{ch} \lambda} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) (1 - \operatorname{ch} \lambda \xi) - \frac{\xi^2}{2} \right]$$

$$M_w = \frac{E_c I_{eq}}{H^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{qH^2}{\lambda^2} \left[\left(1 + \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda}{2} - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\lambda} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda \xi}{\operatorname{ch} \lambda} - \xi - \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \xi \right]$$

$$V_w = -\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} = -\frac{qH}{\lambda^2} \left[\left(\lambda + \frac{\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda}{2} - \operatorname{sh} \lambda \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda \xi}{\operatorname{ch} \lambda} - \left(\frac{\lambda^2}{2} - 1 \right) \operatorname{ch} \lambda \xi - 1 \right]$$

$$V_f = \frac{C_f}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi} = qH \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh} \lambda}{2} - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\lambda^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda \xi}{\operatorname{ch} \lambda} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) (1 - \operatorname{ch} \lambda \xi) - \frac{\xi^2}{2} \right]$$

7.3.4 倒三角形分布荷载下内力及侧移计算

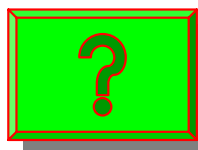
推导如前，略

7.3.4 顶点集中水平荷载作用下内力及侧移计算

推导如前，但边界条件(1)有变化，即顶点总剪力不等于零。

其他推导同前，略

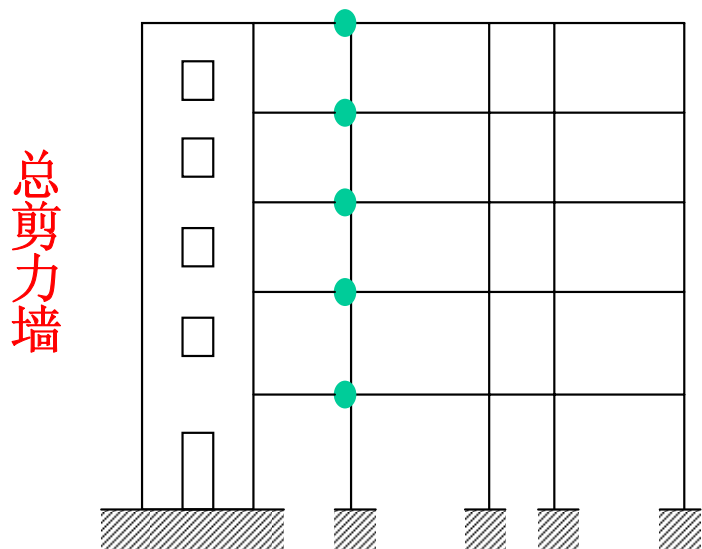
7.4 框架-剪力墙刚结体系结构分析



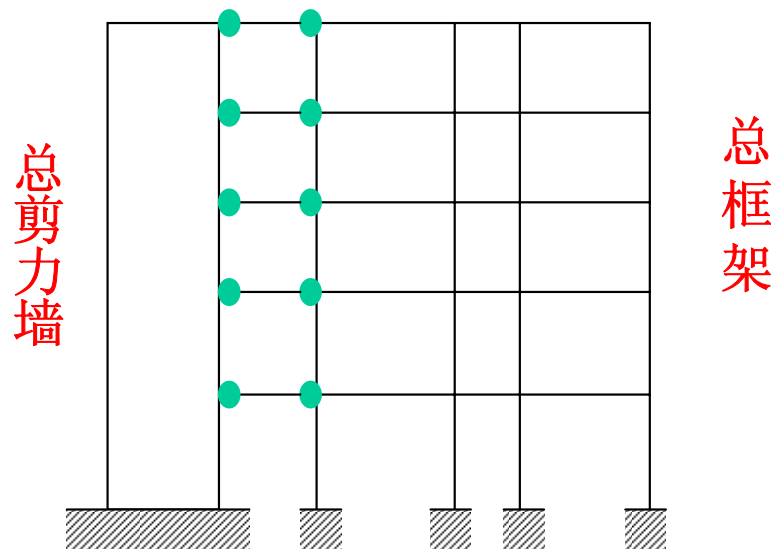
问题：框架-剪力墙刚结体系与铰接体系有何异同？

共性：总剪力墙与总框架通过连杆传递之间的相互作用力。

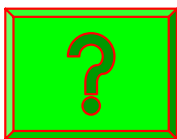
个性：刚接体系中连杆对总剪力墙的弯曲有一定的约束作用。



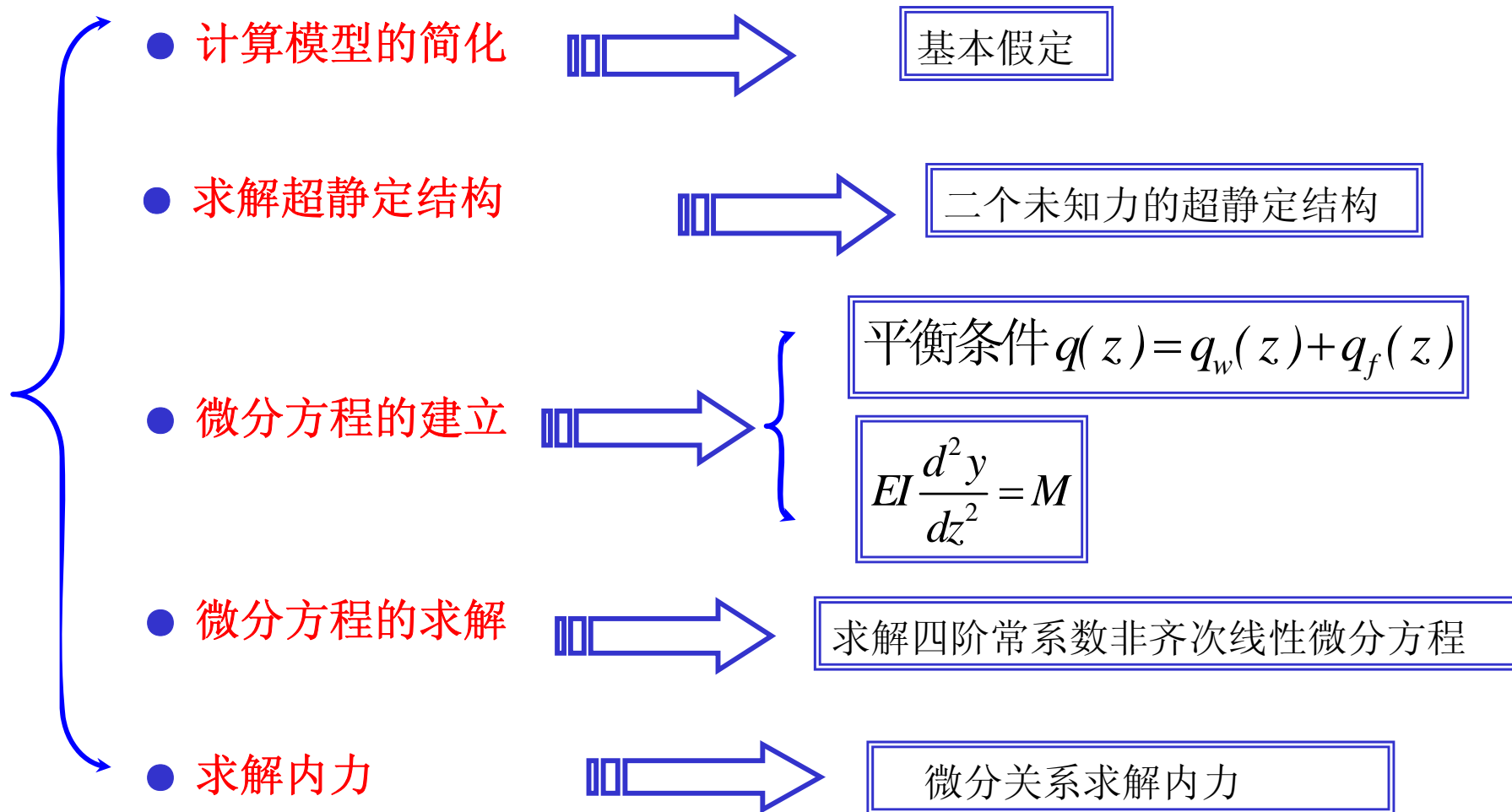
刚性连杆



铰接连杆



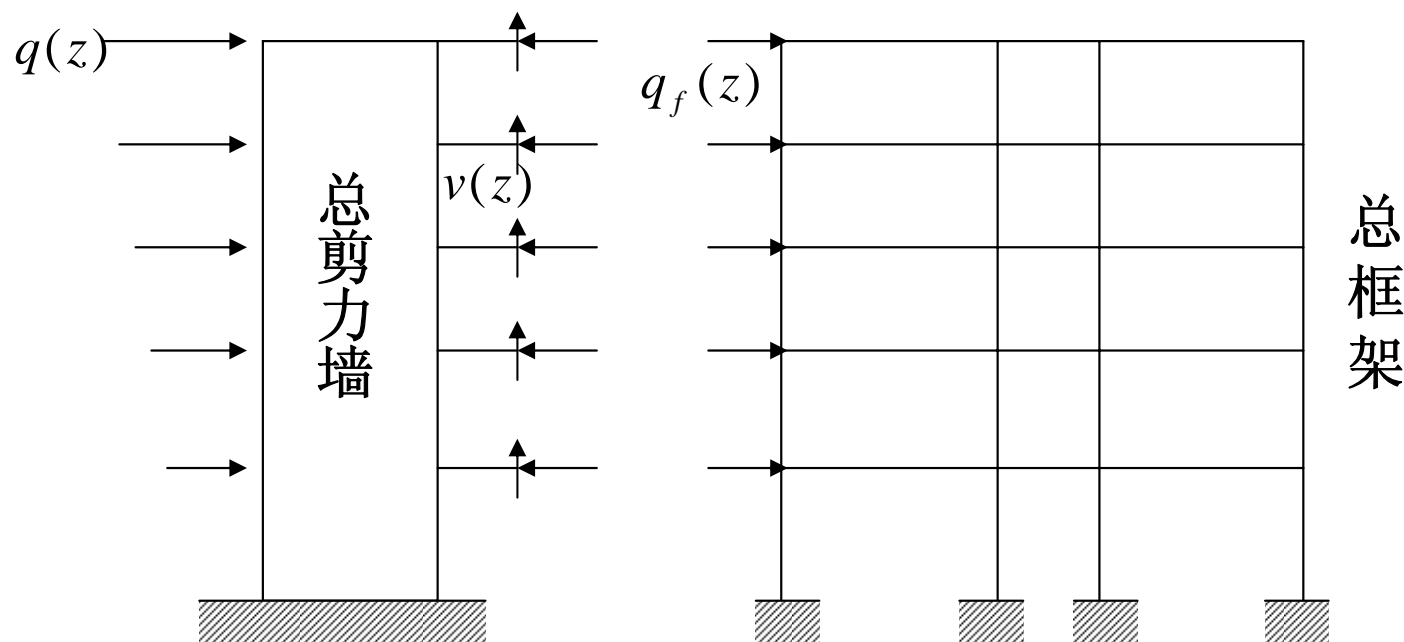
问题：框架-剪力墙刚结体系求解的基本思路？



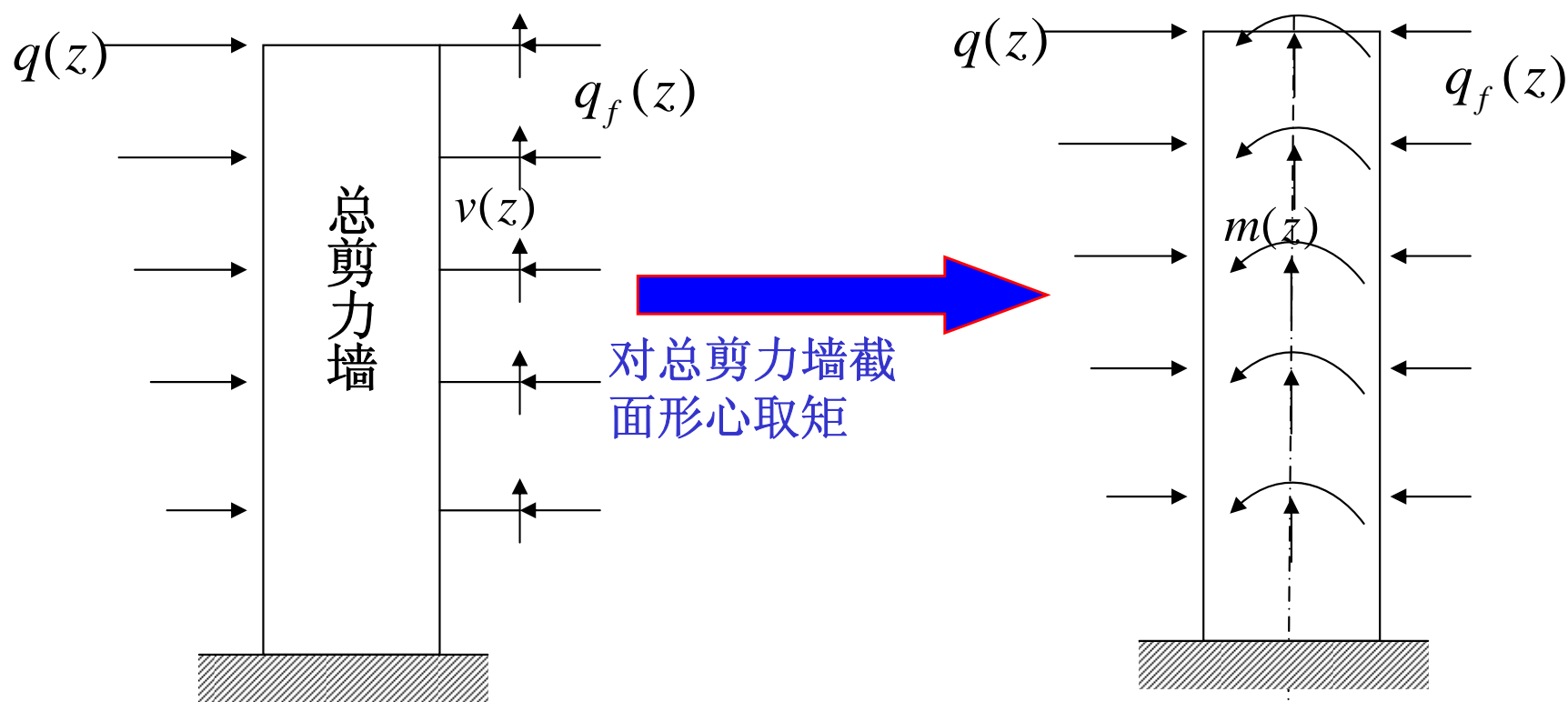
7.4.1 基本微分关系

1、基本假定

- 1) 沿连梁的**反弯点切开**；（注意**反弯点位置**）
- 2) 连梁轴力体现总框架与总剪力墙间相互作用的水平力 $q_f(z)$ ；
- 3) 总连梁沿高度连续化，连梁剪力转化为沿高度连续分布的剪力 $v(z)$ ；



4) 将分布剪力向剪力墙轴线简化, 则剪力墙将产生分布轴力 $v(z)$ 和线约束弯矩 $m(z)$ 。



2、平衡条件

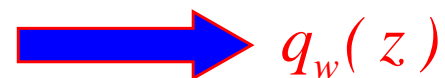
框-剪结构任意高度 z 处，存在下列平衡关系：

$$q(z) = q_w(z) + q_f(z)$$

$q(z)$ ， $q_w(z)$ ， $q_f(z)$ 分别为 z 高度处的外荷载、总剪力墙承受的荷载和总框架承受的荷载。

如何求 $q_w(z)$ 、 $q_f(z)$ ？

2、总剪力墙内力与位移的微分关系

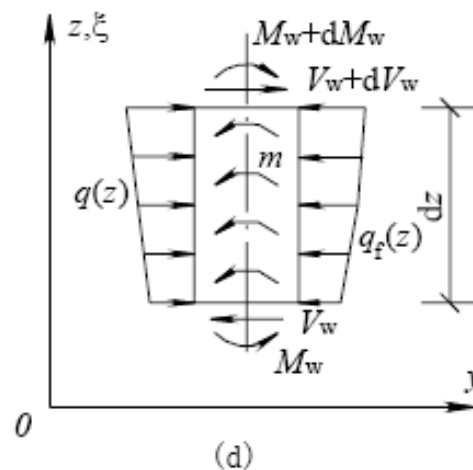
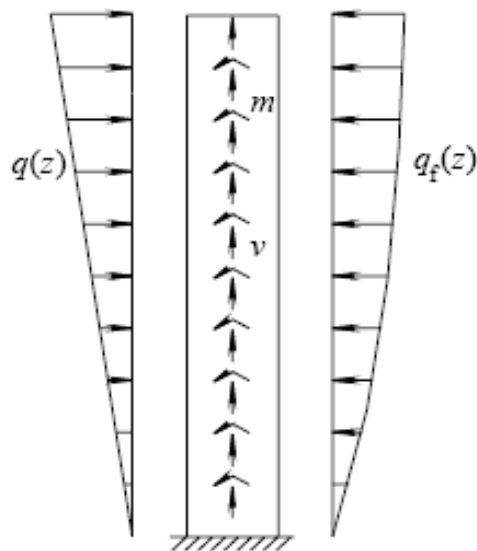


从总剪力墙中截取高度为 dz 的微段，截面内力如图（未画分布轴力）。由平衡条件可得下列关系式：

$$dV_w + q(z)dz - q_f(z)dz = 0$$

整理，并引入水平荷载平衡条件，可得

$$\frac{dV_w}{dz} = -q_w(z)$$



由微段上所有力对截面下边缘形心的力矩之和为零，即

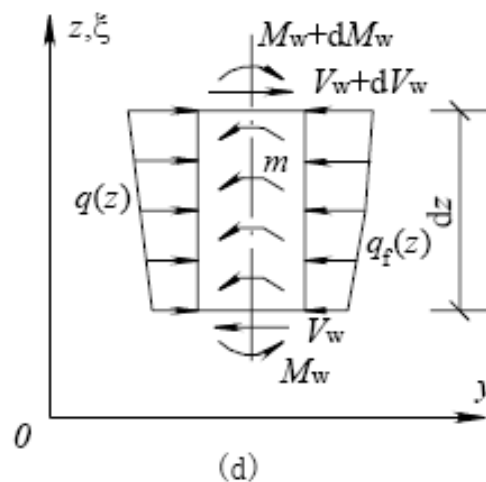
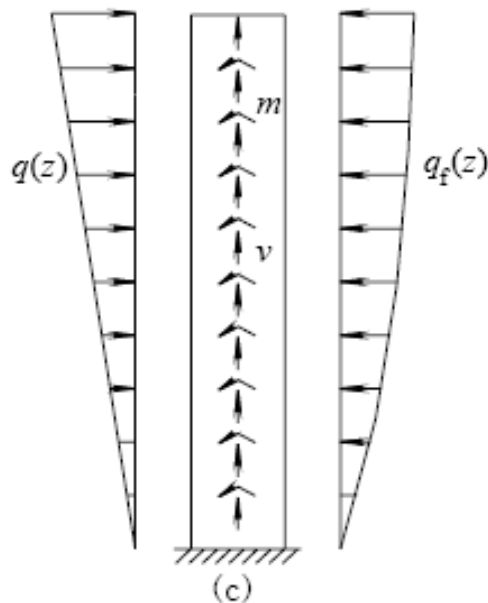
$$dM_w + (V_w + dV_w) dz + (q(z) - q_f(z)) dz \cdot \frac{dz}{2} - m(z) dz = 0$$

略去二阶微量，可得

$$\frac{dM_w}{dz} = -V_w + m(z)$$

根据弯矩与曲率关系，可得

$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} + m(z)$$



4. 总框架内力与位移的微分关系  $q_f(z)$

$$V_f = C_f \phi = C_f \frac{dy}{dz}$$

将上式对 z 微分一次，得

$$-q_f(z) = \frac{dV_f}{dz} = C_f \frac{d^2y}{dz^2}$$

3、总连梁内力与位移的微分关系

由杆端转动刚度 S 的定义，总连梁的约束刚度 C_b 可写成

$$C_b = \sum \frac{S_{ij}}{h} = \sum \frac{M_{ij}}{\theta h}$$

M_{ij} 、 S_{ij} 表示第 i 层第 j 连梁与剪力墙刚结端的转动刚度和弯矩。

总连梁的线约束弯矩 $m(z)$ 可表示为

$$m(z) = \sum \frac{M_{ij}}{h} = C_b \theta = C_b \frac{dy}{dz}$$

7.4.2 基本方程及其解

1、基本方程

$$\frac{dV_w}{dz} = -q_w(z)$$

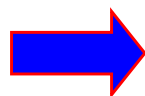
$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} + m(z)$$

$$m(z) = \sum \frac{M_y}{h} = C_b \theta = C_b \frac{dy}{dz}$$

由上式可得

$$q_w(z) = E_c I_{eq} \frac{d^4 y}{dz^4} - C_b \frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$-q_f(z) = \frac{dV_f}{dz} = C_f \frac{d^2 y}{dz^2}$$



$$E_c I_{eq} \frac{d^4 y}{dz^4} - (C_b + C_f) \frac{d^2 y}{dz^2} = q(z)$$

$$q(z) = q_w(z) + q_f(z)$$

$$E_c I_{eq} \frac{d^4 y}{dz^4} - (C_b + C_f) \frac{d^2 y}{dz^2} = q(z)$$

引入无量纲坐标 $\xi = z/H$ ，整理后得

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{q(\xi)H^4}{E_c I_{eq}}$$

λ 为框架-剪力墙刚结体系的刚度特征值，按下式计算

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{C_b + C_f}{12 E_c I_{eq} H^2}}$$

注：1) 上式为框-剪结构刚结体系的微分方程，与铰接体系形式上完全相同。

2) 与铰结体系刚度特征值相比，**仅在根号内分子项多一项 C_b** ，当 $C_b = 0$ 时，上式就转化为铰接体系， C_b 反映了连梁对剪力墙的约束作用。抗震计算中，连梁刚度可予以折减，折减系数不宜小于 0.5。

7.4.2 基本方程及其解

2、求解

$$y = C_1 + C_2\xi + C_3\text{sh}\lambda\xi + C_4\text{ch}\lambda\xi + y_1$$

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{H} \frac{dy}{d\xi}$$

$$M_w = E_c I_{\text{eq}} \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{E_c I_{\text{eq}}}{H^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\xi^2}$$

$$V_w = -E_c I_{\text{eq}} \frac{d^3 y}{dz^3} + m = -\frac{E_c I_{\text{eq}}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} + m$$

$$V_f = V - \left(-\frac{E_c I_{\text{eq}}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} + m\right) = V_f' - m$$

$$m = C_b \frac{dy}{dz} = \frac{C_b}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$



3、刚结与铰结体系比较

(1) 结构侧移 y 、转角 θ 以及总剪力墙弯矩 M_w ，刚结体系与铰结体系具有完全相同的表达式。但各式中的刚度特征 λ 计算不同。

(2) 总剪力墙剪力 V_w 的表达式不同。刚结体系比较接体系多了一项，即增加一项 $m(z)$ 影响。

$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} = -\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} \quad \text{铰接体系}$$

$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} + m = -\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3} + m \quad \text{刚结体系}$$

(3) 总框架剪力的表达式不同。对刚结体系， $V_f = V_f' - m$ ，其中总框架的名义剪力 V_f' 与铰结体系中总框架剪力的表达式相同，但式中的 λ 须考虑连梁刚度。

(4) 刚结体系应计算总连梁的线约束弯矩 m 。均布荷载、三角形水平分布荷载和顶点集中水平荷载作用下 m 的表达式:

$$m = C_b \frac{dy}{dz} = \frac{C_b}{H} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$

$$m = \frac{qH^3 C_b}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{\lambda ch\lambda} \right) sh\lambda\xi - ch\lambda\xi - \xi + 1 \right] \quad (\text{均布荷载})$$

$$m = \frac{qH^3 C_b}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{sh\lambda}{2} - \frac{sh\lambda}{\lambda^2} \right) \frac{sh\lambda\xi}{ch\lambda} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) (1 - ch\lambda\xi) - \frac{\xi^2}{2} \right]$$

(倒三角形分布荷载)

$$m = \frac{PH^2 C_b}{E_c I_{eq}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} (th\lambda sh\lambda\xi - ch\lambda\xi + 1) \quad (\text{顶点集中水平荷载})$$

注: 二者的不同之处主要体现在连梁对剪力墙的约束作用。

7.4.3 总框架剪力 V_f 和总连梁线约束弯矩 m 的另一种算法

为利用框-剪铰结体系的公式，通常采用下述方法，使计算更为简便。

由水平方向力的平衡条件

$$V(z) = V_w(z) + V_f(z)$$

$$V_f(z) + m(z) = V(z) - (-E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3})$$

$$V_w = -E_c I_{eq} \frac{d^3 y}{dz^3} + m(z)$$

可改写为

$$V_f(z) + m(z) = V'_f(z)$$

$$\frac{dy}{dz} = V'_f / (C_f + C_b)$$

$$V_f = \frac{C_f}{C_f + C_b} V'_f$$

$$m = \frac{C_b}{C_f + C_b} V'_f$$

$$V_f = C_f \phi = C_f \frac{dy}{dz}$$

$$m(z) = \sum \frac{M_g}{h} = C_b \theta = C_b \frac{dy}{dz}$$

7.4.4 框架-剪力墙结构的受力和侧移特征

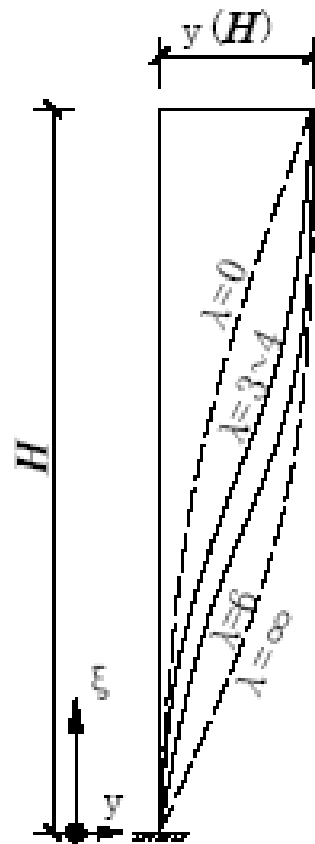
1、结构侧向位移特征

当 $C_f=0$ 时，如不考虑连梁的约束作用，则 $\lambda=0$ ，为纯剪力墙结构体系，其侧移曲线呈弯曲型变形；

当 $E_c I_w=0$ 时， $\lambda=\infty$ ，为纯框架结构，其侧移曲线呈剪切型；

当 $0<\lambda<\infty$ 时，框-剪结构侧移曲线介于弯曲型与剪切型之间，属弯剪型或剪弯型。

当 $\lambda \leq 1$ 时，框架的作用已很小，框-剪结构基本上为弯曲型变形。当 $\lambda \geq 6$ 时，剪力墙的作用已很小，框-剪结构基本上为整体剪切型变形。一般情况 $\lambda=1.5\sim 2.5$ 。



2、荷载与剪力的分布特征

(1) 荷载分布

水平均布荷载下，铰结体系总剪力墙和总框架的剪力分别为

$$\left. \begin{aligned} V_w &= qH \left[ch\lambda\xi - \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{\lambda ch\lambda} \right) sh\lambda\xi \right] \\ V_f &= qH \left[\left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{\lambda ch\lambda} \right) sh\lambda\xi - ch\lambda\xi - \xi + 1 \right] \end{aligned} \right\}$$

由上式可求得总剪力墙与总框架的荷载分别为

$$\left. \begin{aligned} q_w &= -\frac{dV_w}{dz} = q \left[\left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda} \right) ch\lambda\xi - \lambda sh\lambda\xi \right] \\ q_f &= -\frac{dV_f}{dz} = q \left[1 + \lambda sh\lambda\xi - \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda} \right) ch\lambda\xi \right] \end{aligned} \right\}$$

$$q = q_w + q_f$$

q_w 、 q_f 沿结构高度的变化见图。

q_w 、 q_f 作用方向与外荷载方向一致时为正。可见框架承受的荷载在上部为正，下部为负。这是由于水平荷载下墙和框架变形曲线不同，当二者协同工作时，变形形式必须一致，二者间必然产生上述荷载形式。

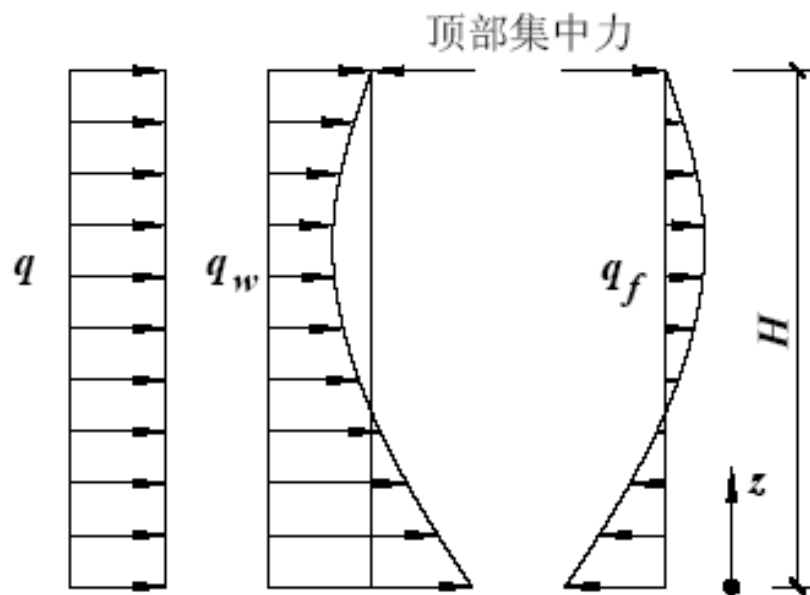


图 7.4.3 q_w 和 q_f 沿高度分布图

(2) 剪力分布

■ 在框-剪结构的顶部，令 $\xi=1$ ，由下式

$$\left. \begin{aligned} V_w &= qH \left[ch\lambda\xi - \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{\lambda ch\lambda} \right) sh\lambda\xi \right] \\ V_f &= qH \left[\left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{\lambda ch\lambda} \right) sh\lambda\xi - ch\lambda\xi - \xi + 1 \right] \end{aligned} \right\}$$

可求得

$$V_w = -V_f$$

取 $\lambda=5.1$ ，则 $V_w = -V_f = 0.178qH$ 。这表明在框架和剪力墙顶部，存在大小相等、方向相反的自平衡集中力，这也是由于两者的变形曲线必须协调一致所产生的。

■总框架与总剪力墙之间的剪力分配与刚度特征值 λ 有很大关系。均布荷载下剪力分布如下图。当 $\lambda = 0$ 时，框架剪力为零，剪力墙承担全部剪力；当 λ 很大时，框架几乎承担全部剪力； λ 为任意值时，框架和剪力墙按刚度比各承受一定的剪力。

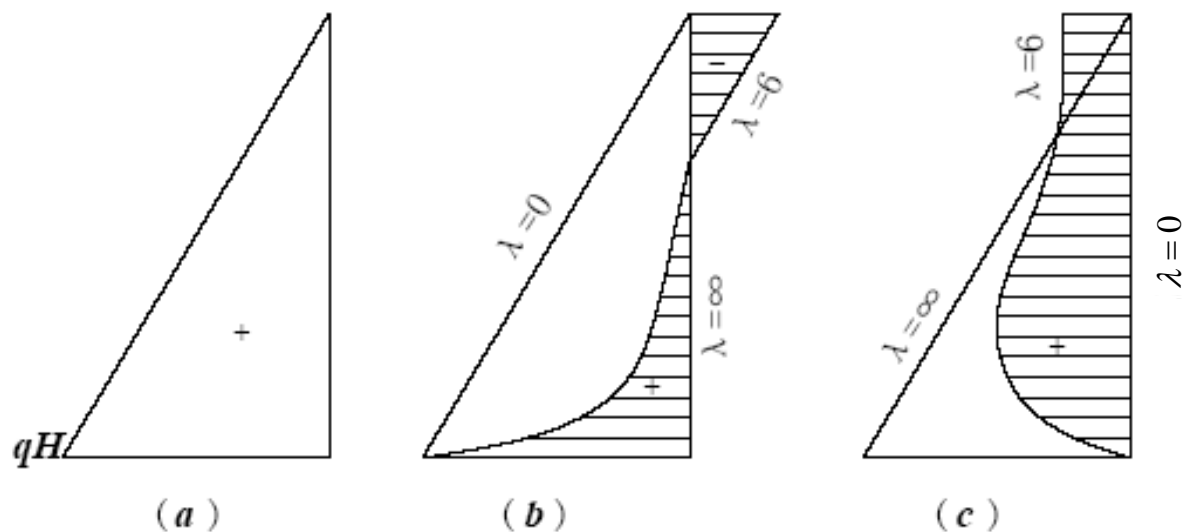


图 7.4.4 V_w, V_f 与 λ 的关系

注：基底处框架不承担剪力，全部剪力由剪力墙承担。

■ 框架最大剪力位置距底部坐标 ξ_0 可由下列条件求出

$$\frac{dV_f}{dz} = -q_f = 0$$

$$q_f = -\frac{dV_f}{dz} = q\left[1 + \lambda sh\lambda\xi - \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda}\right)ch\lambda\xi\right]$$

$$1 + \lambda sh\lambda\xi_0 - \left(\frac{\lambda sh\lambda + 1}{ch\lambda}\right)ch\lambda\xi_0 = 0$$

表 7.4.1 ξ_0 随 λ 的变化规律

λ	0.5	1.0	2.0	2.4	3.0	6.0	∞
ξ_0	1.0	0.772	0.537	0.483	0.426	0.301	0

1) 随 λ 值增大, 最大剪力位置 ξ_0 向结构底部移动。 λ 通常在 1.0~3.0 范围内, 则框架最大剪力位置大致处于结构中上部附近, 而不在结构底部, 这与纯框架结构不同。

2) 与纯框架结构相比, 框-剪结构中 V_f 沿高度分布相对比较均匀, 这对框架底部受力比较有利。

3、连梁刚结对侧移和内力的影响

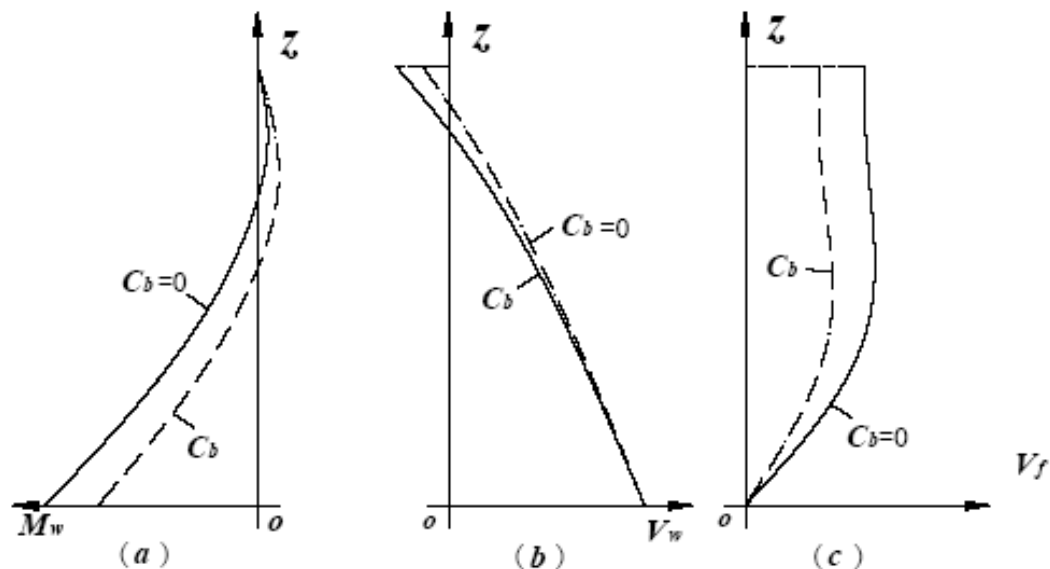


图 7.4.5 连梁刚结对结构内力的影响

- (1) 考虑连梁约束作用时，刚度特征值 λ 增大，侧向位移减小。
- (2) 由于连梁对剪力墙的线约束弯矩为反时针方向，考虑连梁约束作用时，剪力墙上部截面的负弯矩将增大，下部截面的正弯矩将减小，反弯点下移。
- (3) 考虑连梁的约束作用时，剪力墙的剪力将增大，而框架剪力减小。

7.5 框架-剪力墙结构内力计算步骤及计算实例

7.5.1 内力计算步骤

1、总框架、总连梁及总剪力墙内力

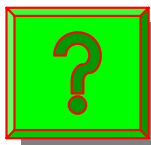
(1) 对于框架-剪力墙铰结体系，按式 (7.3.11)，(7.3.17) 和式 (7.3.23) 计算总框架剪力 V_f ；如为刚结体系，则按上述公式计算所得的值是 V_f' ，然后按式 (7.4.14) 计算总框架剪力 V_f 和总连梁的线约束弯矩 m 。

(2) 总剪力墙弯矩，对铰结和刚结体系均按式 (7.3.9)、(7.3.15) 和 (7.3.21) 计算。总剪力墙剪力，对铰结体系按式(7.3.10)、(7.3.16)和式(7.3.22)计算；对刚结体系，按上述公式计算所得的值是式(7.4.10)第 4 式中的第一项 $(-\frac{E_c I_{eq}}{H^3} \cdot \frac{d^3 y}{d\xi^3})$ ，然后将其与上面所计算出的总连梁的线约束弯矩 m 相加，即得总剪力墙剪力。

2、构件内力

1) 框架梁柱内力

根据各层框架的总剪力 V_f （经过调整后），可用D值法计算梁柱内力，计算公式及步骤见5.4.2小节。



问题：框架-剪力结体中各层框架的总剪力 V_f 为什么调整、又如何调整？

(1) 框架与剪力墙的变形不能完全协调，故框架实际承受的剪力比计算值大；

(2) 在地震作用过程中，剪力墙开裂后框架承担的剪力比例将增加，剪力墙屈服后，框架将承担更大的剪力。

调整方法：

$V_f \geq 0.2V_0$  V_f 可按计算值，不作调整；

$V_f < 0.2V_0$  V_f 可取 $1.5V_{f\max}$ 与 $0.2V_0$ 两者中的较小值。

2) 连梁内力

按式 (7.4.14) 求得总连梁的线约束弯矩 $m(z)$ 后, 将 $m(z)$ 乘以层高 h 得到该层所有与剪力墙刚结的梁端弯矩 M_{ij} 之和, 即

$$\sum M_{ij} = m(z)h$$

式中 z 为从结构底部至所计算楼层高度。将 $m(z)h$ 按下式分配给各梁端:

$$M_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sum S_{ij}} m(z)h \quad (7.5.1)$$

式中 S_{ij} 按式 (7.2.9) 或式 (7.2.10) 计算。按上式求得的弯矩是连梁在剪力墙形心轴处的弯矩。计算连

对于图 7.5.1 所示的两种情况, 连梁剪力均可按下式计算:

$$V_b = \frac{M_{12} + M_{21}}{l} \quad (7.5.5)$$

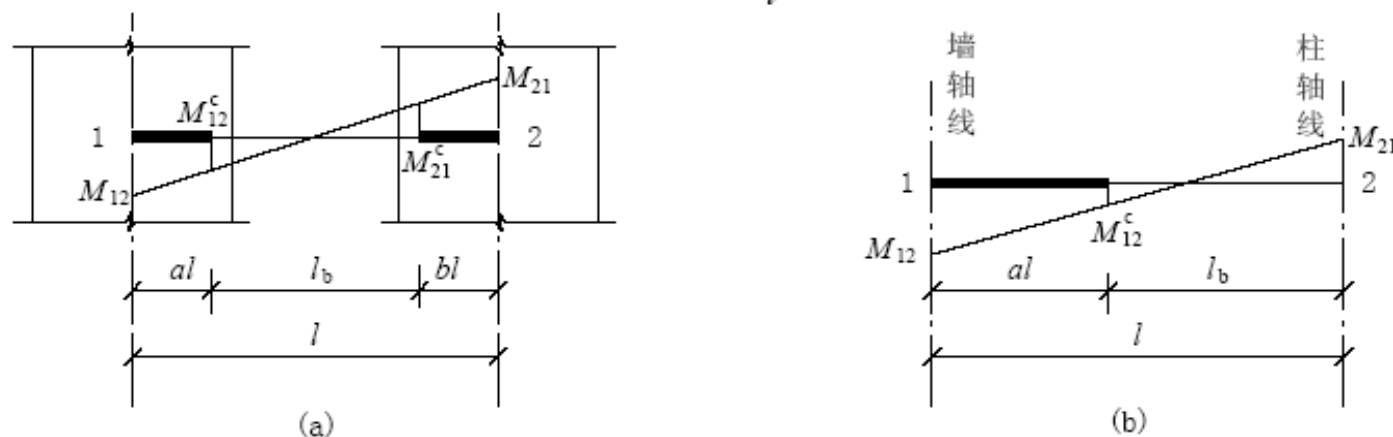


图 7.5.1 连梁梁端弯矩

3) 各片剪力墙内力

第 i 层第 j 片剪力墙的弯矩按下式计算

$$M_{wij} = \frac{(E_c I_{eq})_{ij}}{\sum_j (E_c I_{eq})_{ij}} M_{wi} \quad (7.5.6)$$

第 i 层第 j 片剪力墙的剪力按下式计算

$$V_{wij} = \frac{(E_c I_{eq})_{ij}}{\sum_j (E_c I_{eq})_{ij}} (V_{wi} - m_i) + m_{ij} \quad (7.5.7)$$

式中 V_{wi} ——第 i 层总剪力墙剪力;

m_i, m_{ij} ——分别为第 i 层总连梁及第 i 层与第 j 片剪力墙刚结的连梁端线约束弯矩。

第 i 层第 j 片剪力墙的轴力按下式计算:

$$N_{wij} = \sum_{k=i}^n V_{bkj} \quad (7.5.8)$$

式中, V_{bkj} 为第 k 层连梁与第 j 片剪力墙刚结的连梁剪力。

注: 当框架-剪力墙结构按铰结体系分析时, 可令式 (7.5.7) 中的线约束弯矩 m 等于零, 即可得相应的墙肢剪力。

7.6 考虑扭转效应高层结构近似计算

前述计算均未考虑扭转, 本节简要介绍考虑结构扭转效应的近似计算方法——平面结构空间协同计算。

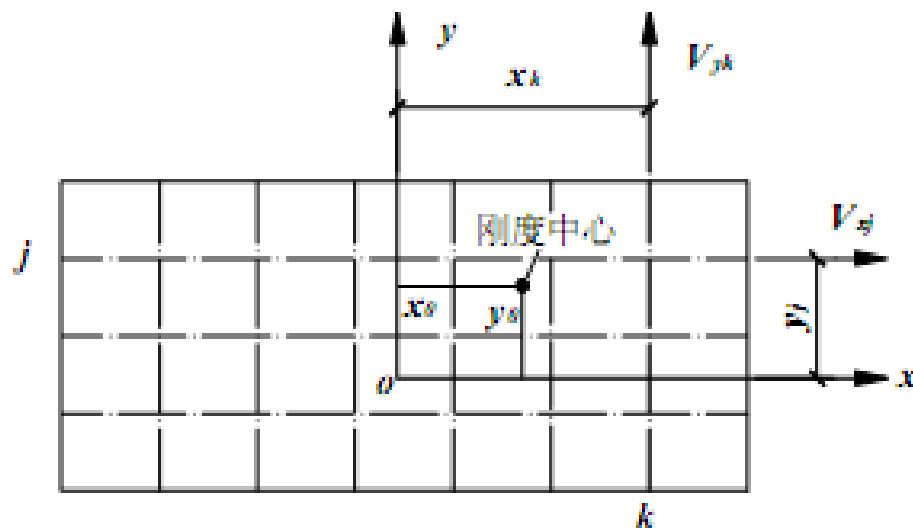
7.6.1 结构侧向刚度与刚度中心

侧向刚度: 使抗侧力结构的层间产生单位相对侧移所需施加的水平力。可表示为

$$D_w = \frac{V_w}{\Delta u}$$

刚度中心: x 、 y 方向抵抗侧力结构所产生抗力的合力作用点, 即

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum V_{yk} x_k}{\sum V_{yk}} \\ y_0 &= \frac{\sum V_{xj} y_j}{\sum V_{xj}} \end{aligned} \right\}$$



根据抗侧刚度的定义，可得

$$\left. \begin{aligned} V_{sj} &= D_{sj} \cdot \Delta u_x \\ V_{jk} &= D_{jk} \cdot \Delta u_y \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum D_{jk} x_k}{\sum D_{jk}} \\ y_0 &= \frac{\sum D_{sj} y_j}{\sum D_{sj}} \end{aligned} \right\}$$

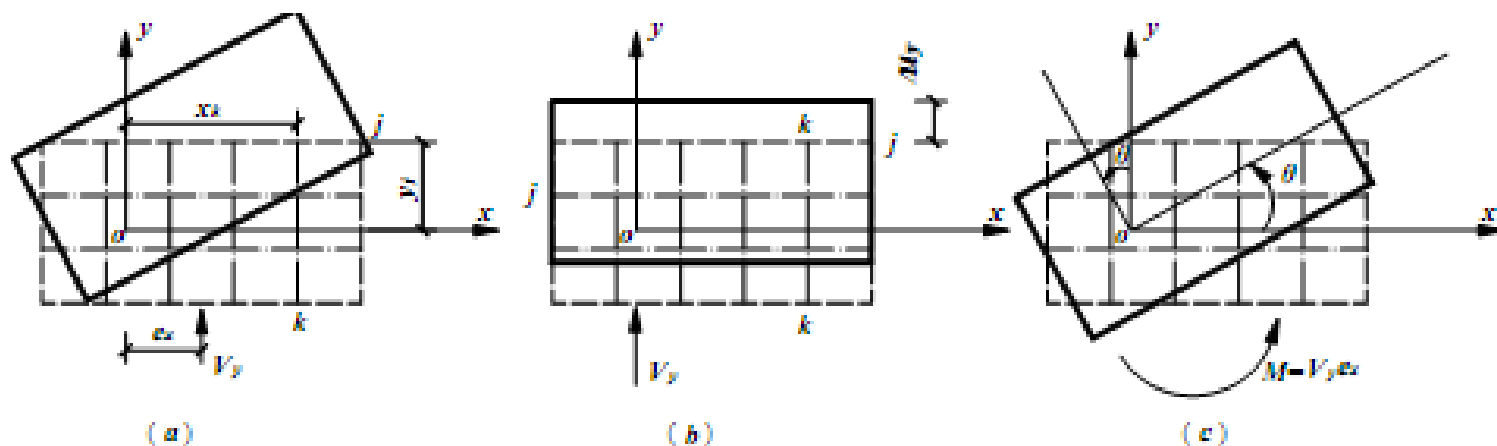
若把各榀抗侧力结构的侧向刚度 D_{xj} 和 D_{yk} 视为假想面积，则刚度中心的坐标就是假想面积的形心位置。刚度中心的坐标仅与各榀抗侧力结构的侧向刚度和布置有关。

7.6.2 水平荷载的分配

1、基本假定

- (1) 忽略层间与层间的相互影响，即各层平面可单独考虑；
- (2) 楼板在自身平面内的刚度无穷大，视为一整体刚性盘；
- (3) 各榀抗侧力结构只在自身平面内产生抗力；
- (4) 楼板扭转产生的转角很小，故取 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ 。

由假定(1)，可把各层平面逐层加以分析。根据假定(2)，同一楼面除整体平移外，还产生刚体转动。

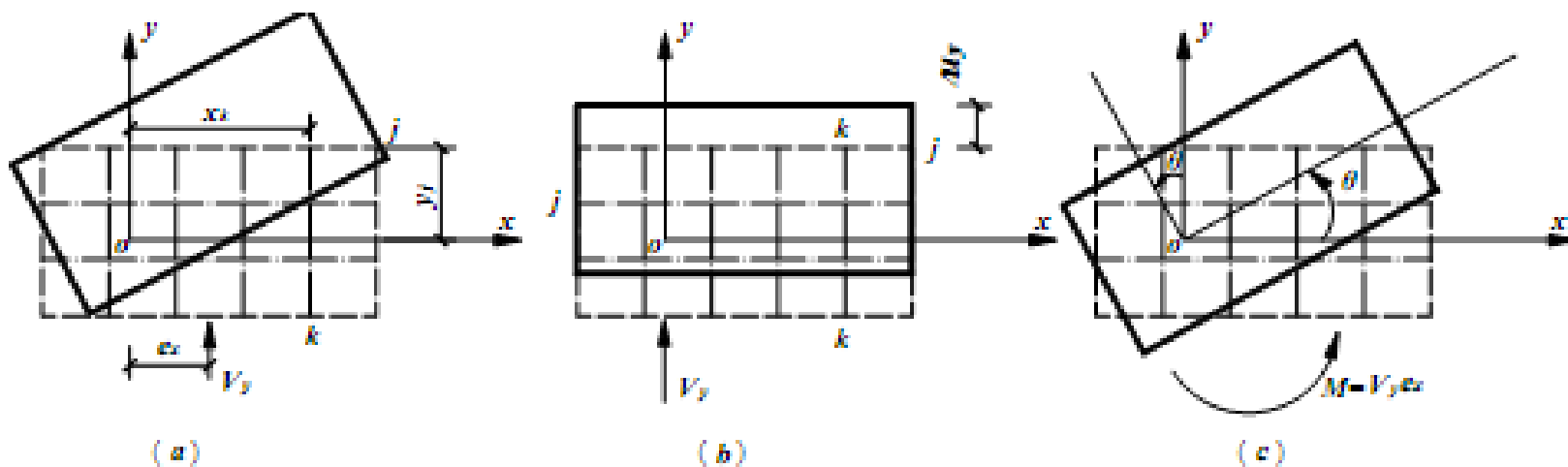


根据假定 (3)、(4)，如y方向第k榀抗侧力结构距刚度中心的距离为 x_k ，则沿y方向的层间侧移为

$$\Delta u_{yk} = \Delta u_y + \theta \cdot x_k$$

如x方向第j榀抗侧力结构距刚度中心的距离为 y_j ，则沿x方向的层间相对侧移为

$$\Delta u_{xj} = -\theta \cdot y_j$$



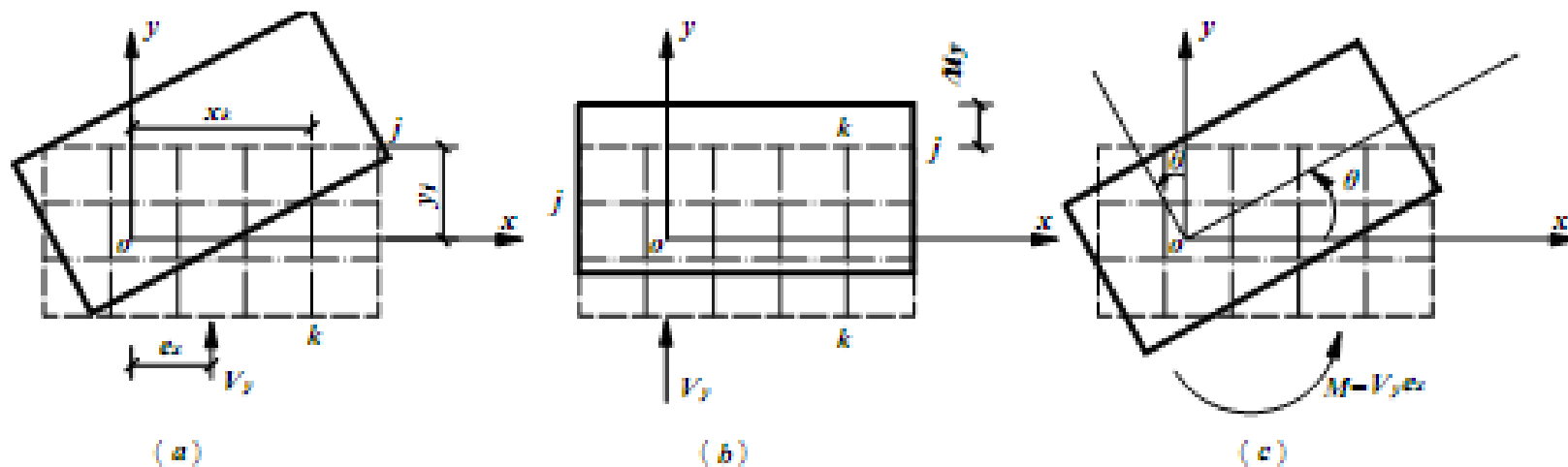
根据侧向刚度的定义，x方向第j榀抗侧力结构和y方向第k榀抗侧力结构的剪力分别为

$$\left. \begin{aligned} V_{xj} &= D_{xj} \Delta u_{xj} = -D_{xj} \theta \cdot y_j \\ V_{yk} &= D_{yk} \Delta u_{yk} = D_{yk} \cdot \Delta u_y + D_{yk} \theta \cdot x_k \end{aligned} \right\}$$

根据平衡条件，可得

$$\sum V_{yk} = (\sum D_{yk}) \Delta u_y + \sum (D_{yk} x_k) \theta = V_y$$

$$\sum (V_{yk} x_k) - \sum (V_{xj} y_j) = V_y e_x$$



将 V_x 、 V_y 代入第二个平衡方程，可得

$$\sum (D_{jk} x_k) \Delta u_y + (\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{xj} y_j^2) \theta = V_y e_x$$

由于 o 为刚度中心，故

$$\sum D_{jk} x_k = 0$$

则

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_y &= \frac{V_y}{\sum D_{jk}} \\ \theta &= \frac{V_y e_x}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{xj} y_j^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} V_{xj} &= -\frac{D_{xj} y_j}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{xj} y_j^2} V_y e_x \\ V_{jk} &= \frac{D_{jk}}{\sum D_{jk}} V_y + \frac{D_{jk} x_k}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{xj} y_j^2} V_y e_x \end{aligned}$$

上式表示 y 方向作用偏心层间剪力时， x 和 y 方向各榀抗侧力结构所分配到的剪力。可知 x 方向的受力较小，常可忽略不计。 Y 方向等号右边第一项表示平移产生的剪力，第二项表示扭转产生的附加剪力，则扭转使结构的内力增大，属不利因素，设计中应通过合理的结构布置予以避免。

将 V_{jk} 改写为如下形式

$$V_{jk} = \left[1 + \frac{e_x x_k (\sum D_{jk})}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{sj} y_j^2} \right] \frac{D_{jk}}{\sum D_{jk}} V_y$$

$$V_{jk} = \alpha_{jk} \frac{D_{jk}}{\sum D_{jk}} V_y \quad \alpha_{jk} = 1 + \frac{e_x x_k (\sum D_{jk})}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{sj} y_j^2}$$

同理，当x方向作用偏心层间剪力时，第j榀抗侧力结构分配到的剪力为

$$V_{sj} = \alpha_{sj} \frac{D_{sj}}{\sum D_{sj}} V_x \quad \alpha_{sj} = 1 + \frac{e_y y_j (\sum D_{sj})}{\sum D_{jk} x_k^2 + \sum D_{sj} y_j^2}$$

α 称扭转修正系数，即考虑扭转后对抗侧力结构所受剪力的修正系数，由于各榀抗侧力结构的坐标位置不同，式中的第二项可能为正或为负，因而可能出现 $\alpha > 1$ 和 $\alpha < 1$ 两种情况。表明受扭后，部分抗侧力结构的剪力增大，另一部分的剪力则减小。