第二篇 积分变换

第 1 章　傅里叶变换

1.1 傅里叶积分

1 傅里叶积分的概念

2 傅里叶积分的物理意义

3 傅里叶积分定理

1 傅里叶积分的概念

定义 1.1 称广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad (1.1)$$

为傅里叶积分. 其中积分变量$t\in$（$-\infty$，$+\infty$）, ω为实值参数.

例 1.1 求函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}\sin 2x, & x\geq 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

的傅里叶积分.

解　由傅里叶积分的定义知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(i\omega+1)x}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{2}{5-\omega^2+2i\omega}.$$

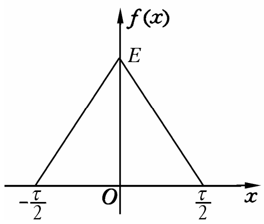
例 1.2 求三角脉冲函数

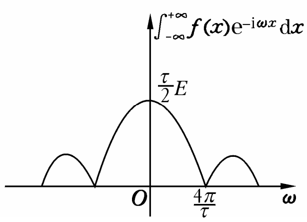
$$f(x)=\begin{cases} \frac{2E}{\tau}(x+\frac{\tau}{2}), & -\frac{\tau}{2}<x<0; \\ -\frac{2E}{\tau}(x-\frac{\tau}{2}), & 0\leq x<\frac{\tau}{2}; \\ 0, & |x|\geq\frac{\tau}{2} \end{cases}$$ 这里有图 1.1 的（a）

的傅里叶积分，其中E，$\tau>0$，见图 1.1(a).

解　$\because f(x)=f(-x)$，

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}-\frac{2E}{\tau}(x-\frac{\tau}{2})\cos\omega x\,dx$$ 这里有图 1.1 的(b)
$$=\frac{8E}{\tau\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau}{4}.$$





(a)　　　　　　图 1.1　　　(b)

2 傅里叶积分的物理意义

满足狄利克条件且以T为周期的函数

$$f_T(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}2\,|\,c_n\,|\cos(\frac{2n\pi}{T}t+\arg c_n)$$

在物理上所有出现的诸振动的振幅$2\,|\,c_n\,|$和相位$\arg c_n$称为由$f_T(t)$所描写的自然现象的离散频谱.

若视定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数$f(t)$的周期$T=+\infty$，可推得

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{k-\frac{T}{2}}^{k+\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

仿照上面将$|F(\omega)|$称为由$f(t)$所描写的自然现象的连续频谱.

3 傅里叶积分定理

定理 1.1 若函数$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足以下条件:

(1) $f(t)$在任一有限区间上连续或只有有限个第一类间断点,

(2) $f(t)$在任一有限区间上至多只有有限个极值点,

(3) $f(t)$绝对可积(即积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t$收敛),

则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

一定存在, 且当t为$f(t)$的连续点时, 有傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega.$$

当t为$f(t)$的间断点时,上式$f(t)$换作$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

证明从略.

例 1.3　求矩形单脉冲函数

$$f(x)=\begin{cases}E, & |\,t\,|\le\dfrac{\tau}{2};\\[2ex] 0, & |\,t\,|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

的傅里叶积分，傅里叶积分公式.

解 傅里叶积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2}).$$

傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\frac{2E}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{\omega\tau}{2}\cos\omega\tau}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega.$$

由傅里叶积分定理还可得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega\tau}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < \frac{\tau}{2}; \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1.2 傅里叶变换

1 傅里叶变换的定义

2 傅里叶变换的性质

1 傅里叶变换的定义

定义 1.2 设 $f(t)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 由傅里叶积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

建立的从 $f(t)$ 到 $F(\omega)$ 的对应称作傅里叶变换（简称傅氏变换）, 用字母 F 表达, 即

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]. \tag{1.3}$$

积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

建立的从 $F(\omega)$ 到 $f(t)$ 的对应称作傅里叶逆变换, 用字母 $\mathcal{F}^{-1}$ 表达, 即

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)].$$

$f(t)$ 称作 F 变换的像原函数, $F(\omega)$ 称作 F 变换的像函数.

例 1.4 求钟形脉冲函数

$$f(t)=Ee^{-\beta t^2} \qquad (\beta>0)$$

的傅氏变换.

解 $$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=E\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\beta}\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\mathrm{d}t.$$

若令 $z=t+\dfrac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\left(t+\frac{\mathrm{i}\omega}{2\beta}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_{-\infty+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}^{+\infty+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\mathrm{d}z.$$

欲求之, 作图 1.2 所示闭路曲线 $ABCD$.

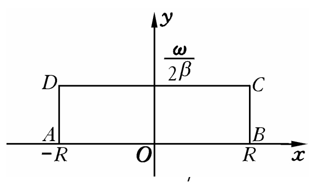


图 1.2

$\because \mathrm{e}^{-\beta z^2}$ 在复平面上处处解析, 由柯西定理知对 $\forall R>0$,

$$\int_{ABCD} \mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=0$$

$$\therefore \lim_{R\to+\infty}\int_{ABCD}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=0$$

又 $\because$
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{AB}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\beta}x)^2}\,\mathrm{d}\sqrt{\beta}x$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{R}^{R+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z\right|=\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{0}^{\frac{\omega}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\beta(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\le\lim_{R\to+\infty}\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{e}^{\frac{\omega^2}{4\beta}-\beta R^2}=0.$$

$$\therefore \lim_{R\to+\infty}\int_{R}^{R+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=0.$$

同理

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}^{-R}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=0.$$

$$\therefore\int_{+\infty+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}^{-\infty+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=\lim_{R\to+\infty}\int_{R+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}^{-R+\frac{\omega}{2\beta}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\beta z^2}\,\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.\quad(1.10)$$

于是

$$F(\omega)=E\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}. \tag{1.11}$$

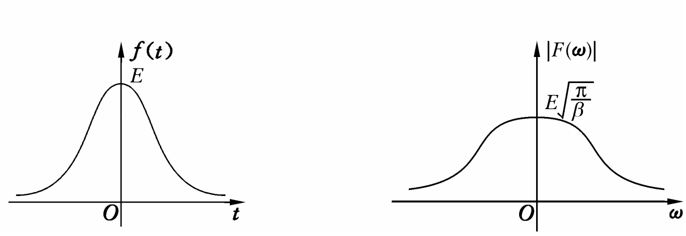


图 1.3

例 1.5 求高斯分布函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的傅氏变换, 其中 $\sigma>0$, 见图 1.4.

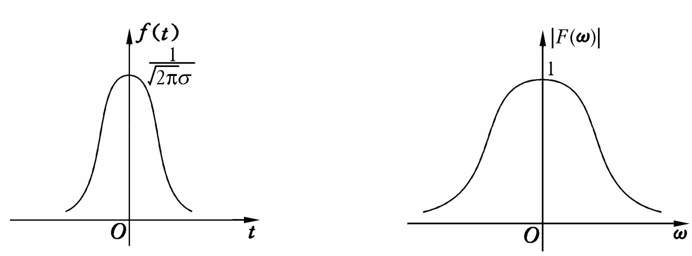


图 1.4

解 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma}+\sigma\omega\mathrm{i})^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\mathrm{d}(\frac{t}{\sigma}+\sigma\omega\mathrm{i})$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty+\sigma\omega\mathrm{i}}^{+\infty+\sigma\omega\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\quad(u=\frac{t}{\sigma}+\sigma\omega\mathrm{i}).$$

应用例 1. 4 求式（1. 10）的方法得

$$F(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

例 1. 6 解积分方程

$$\int_0^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\alpha, & 0\le\alpha\le1;\\ 0, & 1<\alpha.\end{cases}$$

解 补充定义使 $f(x)=f(-x), x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x'}\mathrm{d}x']\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x-x')}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x'\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x')\cos\alpha(x-x')\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x'\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')(\cos\alpha x\cos\alpha x'+\sin\alpha x\sin\alpha x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x')\cos\alpha x'\cos\alpha x\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\alpha x[\int_0^{+\infty}f(x')\cos\alpha x'\mathrm{d}x']\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha\\
&=\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}\quad(x>0).\end{aligned}$$

上面用两屏，

例 1.7 验证傅里叶核 $f(t)=\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$ 与 $F(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_0;\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$

构成傅氏变换对.

解 $\because \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$

$\therefore F(\omega)$ 与 $f(t)$ 构成傅氏变换对.

2 傅里叶变换的性质

（1）线性性质：

$$\mathcal{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{F}[f(t)]+\beta\mathcal{F}[g(t)], \tag{1.12}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)]=\alpha\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]+\beta\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] \tag{1.13}$$

其中，α，β 是常数.

例 1.8 已知 $F(\omega)=\dfrac{1}{(3+\omega\mathrm{i})(4+3\omega\mathrm{i})}$，求 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解 $\because \dfrac{1}{(3+\omega\mathrm{i})(4+3\omega\mathrm{i})}=\dfrac{1/5}{4/3+\omega\mathrm{i}}-\dfrac{1/5}{3+\omega\mathrm{i}}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4/3+\omega\mathrm{i}}\right]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+\omega\mathrm{i}}\right]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-3t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

故由线性性质得:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t}-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

（2）位移性质:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]\,, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t), \tag{1.15}$$

其中t_0和ω_0是常数.

证 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega-\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{d}(\omega-\omega_0)$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)].$$

式(1.14)可类似证之.

例 1.9 已知$F(\omega)=\dfrac{1}{\beta+\mathrm{i}(\omega+\omega_0)}$（$\beta>0$），求$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解 $\because F(\omega-\omega_0)=\dfrac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{i}\omega_0)t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

例 1.10 证明

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)].$$

证 $\because f(t)\sin\omega_0 t=f(t)\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}-\frac{1}{2\mathrm{i}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$$

$F(\omega-\omega_0)=\mathcal{F}[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]$，$F(\omega+\omega_0)=\mathcal{F}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]$

$$\therefore \mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\{\mathcal{F}[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]-\mathcal{F}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})]\}$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)].$$

（3）微分性质:

设函数$f(t)$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续或只有有限个可去间断点

(1) 当$|t|\to+\infty$时，$f^{(n)}(t)\to 0$. 则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^n\mathcal{F}\ [f(t)]\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \qquad (1.16)$$

(2) 若$\int_{-\infty}^{+\infty}|t^n f(t)|\,\mathrm{d}t$收敛, 则

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-\mathrm{i}t)^n\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \qquad (1.17)$$

现用归纳法证明式(1.17), 式(1.16)可类似证之.

证　当$n=1$时, 由定义

$$F'(\omega)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}t$$
$$=(-\mathrm{i})\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=(-\mathrm{i})\mathcal{F}[tf(t)]$$

$$\therefore\quad \mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)]=(-\mathrm{i})tf(t)=(-\mathrm{i}t)\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)].$$

设$n=k$时, 有

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(k)}(\omega)]=(-\mathrm{i}t)^{(k)}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)],$$

则$n=k+1$时,

$$F^{(k+1)}(\omega)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[F^{(k)}(\omega)]$$

$$=\mathcal{F}\{(-\mathrm{i}t)\mathcal{F}^{-1}[F^{k}(\omega)]\}$$

$$=\mathcal{F}\{(-\mathrm{i}t)^{k+1}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(k+1)}(\omega)]=(-\mathrm{i}t)^{k+1}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

所以

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-\mathrm{i}t)^{n}\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

在求 $F'(\omega)$ 的过程中,交换了积分和微分运算的次序. 应该指出,这种交换是需要一定条件的. 今后证明中如碰到类似情形,总假定这两种运算是可交换次序的.

例 1. 11 求函数

$$f(t)=\begin{cases}Et^{n}, & |t|\le\dfrac{\tau}{2};\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

的傅氏变换.

解 设 $f(t)=t^{n}f_1(t)$, $f_1(t)=\begin{cases}E, & |t|\le\dfrac{\tau}{2};\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 由

$$\mathcal{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2E\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2E}{\omega}\cos\frac{\omega t}{2}.$$

和微分性质式(1.17)知 插入式 1.17

$$F_1^{(n)}(\omega)=\mathcal{F}[(-\mathrm{i})^{n}t^{n}f_1(t)]=(-\mathrm{i})^{n}\mathcal{F}[t^{n}f_1(t)],$$

从而

$$\therefore F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[t^n f_1(t)]=(-\mathrm{i})^{-n}F_1^{(n)}(\omega)$$
$$=(\mathrm{i})^n(\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2})^{(n)}$$
$$=(\mathrm{i})^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{2E}{\omega})^{(n-k)}(\sin\frac{\omega\tau}{2})^{(k)}$$

类似地,可求出函数

$$f(t)=\begin{cases} t^n\mathrm{e}^{-\beta t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$(\beta>0)$的傅氏变换为

$$F(\omega)=\frac{n!}{(\beta+\mathrm{i}\omega)^{n+1}}.$$

（4）**积分性质**:

若当$t\to+\infty$时, $\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t\to 0$, 则

$$\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}[f(t)] \tag{1.18}$$

证 $\because$ $[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t]'=f(t)$,

由微分性质式(1.16)得 插入式 1.16

$$\mathcal{F}[f(t)]=(\mathrm{i}\omega)\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t]$$

$$\therefore\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}[f(t)].$$

例 1.12 求电动势为$f(t)$的LRC电路的电流$I(t)$,其中L是电感,R是电阻, C是电容, $f(t)$是电动势(如图 1.5).

解 根据基尔霍夫定律得:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RL+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}I\,\mathrm{d}t=f(t)$$

$$\therefore L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+RL\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}I=f'(t)$$

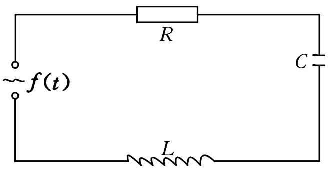


图 1.5

对方程两边取傅氏变换得：

$$L(\mathrm{i}\omega)^2\mathrm{F}[I(t)]+R(\mathrm{i}\omega)\mathrm{F}[I(t)]+\frac{1}{C}\mathrm{F}[I(t)]=\mathrm{i}\omega\mathrm{F}[f(t)].$$

$$\therefore I(t)=\mathrm{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}\omega\Im[f(t)]}{L(\mathrm{i}\omega)^2+R\mathrm{i}\omega+\frac{1}{C}}\right\}.$$

例 1.13 求解微积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)\,\mathrm{d}t=h(t)$$

这里a,b,c为常数，$h(t)$为已知实函数.

解 设$X(\omega)=\mathrm{F}[x(t)],H(\omega)=\mathrm{F}[h(t)]$,

$$\because a\mathrm{F}[x'(t)]+b\mathrm{F}[x(t)]+c\mathrm{F}[\int_{-\infty}^{t}x(t)\,\mathrm{d}t]=\mathrm{F}[h(t)].$$

应用式(1.16),(1.18)有 插入式 1.16，1.18

$$a\mathrm{i}\omega\mathrm{F}[x(t)]+b\mathrm{F}[x(t)]+\frac{c}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{F}[x(t)]=H(\omega).$$

$$\therefore \mathrm{F}[x(t)]=\frac{H(\omega)}{a\mathrm{i}\omega+b+\frac{c}{\mathrm{i}\omega}}$$

$$[x(t)]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{H(\omega)}{a\mathrm{i}\omega+b+\frac{c}{\mathrm{i}\omega}}\right].$$

（5）对称性与相似性

I 对称性 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$. (1.19)

II 相似性 $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$. $(a\neq 0)$ (1.20)

证 I $\because f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$,

$\therefore 2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$,

$\therefore \mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$.

II $\because \mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}F(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}at}\mathrm{d}(at)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a}), & a>0;\\ -\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a}), & a<0.\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}).$$

故结论成立.

例 1.14 求 $\mathcal{F}[\frac{2\sin t}{t}]$.

解　当 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ 时，$\mathcal{F}[f(t)]=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$,则由对称性质式(1.19)得：　　插入式 1.19

$$\mathcal{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]=2\pi f(-\omega)=\begin{cases}2\pi\ , & |\omega|\le 1;\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

例 1.15 设 $f(t)$ 为参数 β 的指数衰减函数，则由相似性质 1.20 有：

插入式 1. 20

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)]&=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\\&=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\beta+\omega\mathrm{i}/a}\\&=\frac{a}{|a|(a\beta+\mathrm{i}\omega)}.\end{aligned}$$

（6）卷积与卷积定理

定义 1.3 若给定两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则由积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

确定的 t 的函数称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记作 $f_1(t)*f_2(t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.21}$$

卷积运算满足交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t). \tag{1.22}$$

满足对加法的分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t). \tag{1.23}$$

现证公式(1.22)，公式(1.23)请自行证之.

证　由定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

作变量替换$\tau'=t-\tau$,那么

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}-f_1(t-\tau')f_2(\tau')\,\mathrm{d}\,\tau'\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\\&=f_2(t)*f_1(t).\end{aligned}$$

例 1.16 设函数

$$f_1(t)=f_2(t)=\begin{cases}1, & |t|<1;\\0, & |t|>1.\end{cases}$$

求$f_1(t)*f_2(t)$.

解　$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\\&=\int_{-1}^{1}f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\\&=\int_{t-1}^{t+1}f_2(\tau')\,\mathrm{d}\,\tau'\quad(\tau'=t-\tau)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}\int_{t-1}^{t+1}0\,\mathrm{d}\,\tau', & |t|\geq 2;\\\int_{t-1}^{1}\mathrm{d}\,\tau', & 0<t<2;\\\int_{-1}^{t+1}\mathrm{d}\,\tau', & -2<t\leq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & |t|\ge 2;\\ 2-t, & 0<t<2;\\ 2+t, & -2<t\le 0.\end{cases}$$

定理 1.2（卷积定理）

若$F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$, 则

(1) $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$ (1.24)

(2) $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)f_2(t)$ (1.25)

现证公式(1.24), 公式(1.25)可仿照证之.

证 $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\tau$$

$$=F_1(\omega)F_2(\omega).$$

例 1.17 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$ 指数衰减函数 $f_2(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$ $(\beta>0)$傅氏变换的卷积$F_1(\omega)F_2(\omega)$.

解 由式(1.25)知 插入式 1.25

$$F_1(\omega)F_2(\omega)=\mathcal{F}[2\pi f_1(t)f_2(t)]$$
$$=\mathcal{F}[2\pi u(t)f_2(t)]=2\pi\,\mathcal{F}[f_2(t)]$$

$$=\frac{2\pi}{\beta+\omega\mathrm{i}}.$$

例 1.18 解积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(u)}{(x-u)^2+a^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+b^2}\quad(0<a<b).$$

解 $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(u)}{(x-u)^2+a^2}\mathrm{d}u=y(x)*\frac{1}{x^2+a^2}$,

$$\therefore \mathrm{F}[y(x)*\frac{1}{x^2+a^2}]=\mathrm{F}[y(x)]\cdot\mathrm{F}[\frac{1}{x^2+a^2}]$$

$$=\mathrm{F}[\frac{1}{x^2+b^2}],$$

$$\because \mathrm{F}[\frac{1}{x^2+a^2}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{z^2+a^2},a\mathrm{i}], & \omega<0;\\ 2\pi\mathrm{i}[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{z^2+a^2},a\mathrm{i}], & \omega>0.\end{cases}$$

$$=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}.$$

$$\mathrm{F}[\frac{1}{x^2+b^2}]=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-b|\omega|},$$

$$\therefore \mathrm{F}[y(x)]=\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|},$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right] \\
&= \frac{a}{b}\frac{b-a}{\pi}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{b-a}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right] \\
&= \frac{a}{b\pi}\frac{b-a}{x^2+(b-a)^2}.
\end{aligned}
$$

1.3 δ函数及其傅里叶变换

1 δ 函数的定义

2 δ函数的性质

3 δ函数的傅里叶变换

1 δ 函数的定义

δ 函数可以用不同方式来定义, 工程上常用的定义是:

定义 1.4 满足以下两个条件

(1) $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ \infty, & t=0.\end{cases}$ 这里有图 1.6

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

的函数称为 δ 函数.

定义 1.5 满足以下两个条件

(1) $\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0;\\ \infty, & t=t_0.\end{cases}$ 这里有图 1.7

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1$

的函数称为 $\delta(t-t_0)$ 函数.

用数学语言可将 δ 函数定义如下:

定义 1.6 函数序列

$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & 0\le t\le\tau;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$ 这里有图 1.8

当 τ 趋向于零时的极限 $\delta(t)$ 称为 δ 函数, 即

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t).$$

δ 函数又称脉冲函数. 至于 $\delta(t)$ 作为哪一种脉冲序列的极限是无关紧要的,这一点正是 δ 函数的实用之处.

由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{\tau\to 0}\int_0^{\tau}\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t \\ &= 1.\end{aligned}$$

所以,δ 函数在工程上和数学上的定义是相统一的.

定义 1.7 函数序列

$$\delta_\tau(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & t_0 \le t \le t_0+\tau; \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 τ 趋向于零时的极限 $\delta(t-t_0)$ 称为 $\delta(t-t_0)$ 函数, 即

$$\delta(t-t_0)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t-t_0).$$

2 δ 函数的性质

(1) 筛选性质

对任意的连续函数 $f(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0); \tag{1.26}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1.27}$$

事实上, $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)f(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\tau \to 0} f(\theta\tau) \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

同理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0).$$

例 1.19 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(-t_0)$$

证 设$t' = t - t_0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t' + t_0) f(t')\,\mathrm{d}t'.$$

$$= f(-t_0).$$

（2）δ函数为偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

事实上,

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\therefore \delta(t) = \delta(-t).$$

将δ函数数学定义中所采用的脉冲换作如下

$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & |\tau|\le\dfrac{\tau}{2};\\[2ex] 0, & |\tau|>\dfrac{\tau}{2}.\end{cases}$$

即可理解该性质.

例 1.20 证明

$$\delta(t)*f(t)=f(t)*\delta(t)=f(t).$$

证 $\because \delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau'-t)f(\tau')\,\mathrm{d}\,\tau' \quad (t-\tau'=\tau)$$

$$=f(t),$$

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-t)f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$=f(t),$$

$$\therefore \delta(t)*f(t)=f(t)*\delta(t)=f(t).$$

（3）相似性质

设为实常数, 则

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (a\ne 0) \tag{1.29}$$

事实上, $t'=at$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{a}f(\dfrac{t'}{a})\delta(t')\,\mathrm{d}t', & a>0;\\ \int_{-\infty}^{+\infty}-\dfrac{1}{a}f(\dfrac{t'}{a})\delta(t')\,\mathrm{d}t', & a<0.\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t')f(\frac{t'}{a})\,\mathrm{d}t'=\frac{1}{|a|}f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t)}{|a|}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(0)}{|a|}.$$

$$\therefore\quad \delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t).$$

（4）δ 函数是单位阶跃函数的导数

$$\delta(t)=u'(t), \tag{1.30}$$

这里

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

为单位阶跃函数.

事实上，故当$t\neq 0$时，

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, & t>0;\\ 0, & t<0\end{cases}=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=u(t).$$

$$\therefore \delta(t)=u'(t).$$

当$t=0$时,

$$\because \delta(0)=\infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{u(\varepsilon)-u(0)}{\varepsilon}=\infty$$

$$\therefore \delta(t)=u'(t).$$

3 δ函数的傅里叶变换

因为

$$\mathrm{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,|_{t=0}=1,$$

$$\mathrm{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,|_{t=t_0}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0},$$

所以

$$\mathrm{F}\big[\delta(t)\big]=1, \qquad \mathrm{F}\big[\delta(t-t_0)\big]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}.$$

例 1.21 证明（a）$f(t)=1$和$F(\omega)=2\pi\ \delta(\omega)$是一组傅氏变换对.（b）$f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$和$F(\omega)=2\pi\ \delta(\omega-\omega_0)$是一组傅氏变换对.

证（a）$\because \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,\omega$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,|_{\omega=0}=1,$$

$\therefore f(t)=1$和$F(\omega)=2\pi\ \delta(\omega)$是一组傅氏变换对.

同时有：$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\,t=2\pi\ \delta(\omega)$ (1.31)

（b）$\because \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,\omega$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,|_{\omega=\omega_0}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t},$$

$\therefore f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$和$F(\omega)=2\pi\ \delta(\omega-\omega_0)$是一组傅氏变换

对.

同时有：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$ (1.32)

显然,（1.3.1）和（1.32）这两个积分在普通积分意义下是不存在的,这里的积分被赋予了$\delta(t)$函数的意义.

例 1.22　求$f(x)=\cos\omega_0 x$的傅氏变换.

解　$\because \cos\omega_0 x=\dfrac{e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore F(\omega) &= \mathcal{F}[\cos\omega_0 x] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 x}+e^{-i\omega_0 x}}{2}e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i(\omega-\omega_0)x}+e^{-i(\omega+\omega_0)x}]\,dx \\ &= \pi\,[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \mathcal{F}[f(x)]=\mathcal{F}[\sin\omega_0 x] \\ &= i\pi\,[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

例 1.23 证明单位阶跃函数$u(t)$在$t\neq 0$时的傅氏变换为

$$F(\omega)=\frac{1}{i\omega}+\pi\,\delta(\omega)$$

证 $\because \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\dfrac{1}{i\omega}+\pi\,\delta(\omega)]e^{i\omega t}\,d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\,\omega+\frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\,\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t>0;\\ 0, & t=0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & t<0.\end{cases}$$

所以当$t\neq 0$时, $u(t)$和$F(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\,\omega}+\pi\,\delta(\omega)$构成一组傅氏变换对.

1.4 离散傅里叶变换和离散沃尔什变换

1 离散傅里叶变换

（1）离散傅里叶变换的定义

（2）离散傅里叶变换的性质

2 快速傅里叶变换

3 离散沃尔什变换

（1）离散沃尔什变换的定义

（2）离散沃尔什变换的性质

第 1 章习题

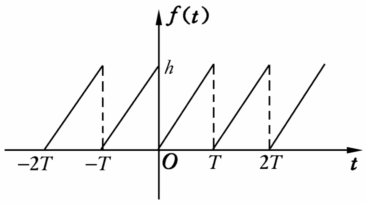
1.1.1 求下列函数的傅氏积分:

(a) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1\\ 0\ , & |t|>1\end{cases}$

(b) $f(t)=\begin{cases}0\ , & -\infty<t<-1\\ -1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0\ , & 1<t<+\infty\end{cases}$

(c) $f(t)=\mathrm{e}^{\frac{-(\pi t)^2}{a}}$.

1.1.2 求作如图所示的锯形波关于$|c_n|$的变化图.



1.1.3 求证：若$f(t)$满足傅氏积分定理条件，当$f(t)$为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\text{；}$$

当$f(t)$为偶函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega,$$

其中 $a(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}\,t$；

1.2.1 求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果:

(a) $f(t)=e^{-\beta|t|}\ (\beta>0)$，证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$.

(b) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$，证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$.

(c) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi;\\ 0\ , & |t|>\pi.\end{cases}$ 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi;\\ 0\ , & |t|>\pi.\end{cases}$$

1.2.2 求下列函数的傅氏逆变换:

(a) $F(\omega)=\dfrac{2}{(3+i\omega)(5+i\omega)}$； (b) $F(\omega)=\dfrac{\omega^2+10}{(5+i\omega)(9+\omega^2)}$.

1.2.3 已知某函数的傅氏变换为$F(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数的$f(t)$.

1.2.4 设$F(\omega)$是函数$f(t)$的傅氏变换，证明：$F(-\omega)=\mathcal{F}[f(-t)]$（翻转性质）.

1.2.5 若$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，证明：

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)].$$

1.2.6 证明：$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}$.

1.2.7 证明：若$\mathcal{F}[e^{i\varphi(t)}]=F(\omega)$，其中$\varphi(t)$为一实函数，则

$$\mathcal{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathcal{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2i}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}].$$

1.2.8 已知 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，求下列函数的傅氏变换:

(a) $tf(t)$;　　(b) $(1-t)f(1-t)$;　　(c) $tf(2t)$;

(d) $(t-2)f(-2t)$;　　(e) $f(2t-5)$;　　(f) $t\frac{df(t)}{dt}$.

1.2.9 求下列函数的傅氏变换:

(a) $f(t)=te^{-at}u(t)$;　　(b) $f(t)=\frac{a^2}{a^2+4\pi^2t^2}$.

1.2.10 利用傅氏变换求解下列积分方程:

(a) $$\int_0^{+\infty}g(\omega)\sin\omega t d\omega=\begin{cases}1\ , & 0\le t<1;\\ 2\ , & 1\le t<2;\\ 0\ , & t\ge 2.\end{cases}$$

(b) $$\int_0^{+\infty}g(\omega)\cos\omega t d\omega=\frac{\sin t}{t}.$$

1.2.11 若 $f_1(t)=\begin{cases}0\ , & t<0\\ e^{-t}\ , & t\ge 0\end{cases}$, $f_2(t)=\begin{cases}\sin t\ , & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,

求$f_1(t)*f_2(t)$.

1.2.12 利用瑞利定理，求下列积分的值:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$；(b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$；

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；(d) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

1.3.1 求下列函数的傅氏变换:

(a) $u(t)\sin bt$；(b) $u(t)\cos bt$；

(c) $e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$；(d) $e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)$；

(e) $\sin^3 t$；(f) $\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & \mathrm{t}>0\end{cases}$.

1.3.2 设 $f_1(t)=e^t\cos t$，$f_2(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$.