第 2 章　拉普拉斯变换

2.1 拉普拉斯变换

2.2 拉普拉斯逆变换

2.3 拉普拉斯变换的性质

2.4 拉普拉斯变换的应用

2.1 拉普拉斯变换

1 拉普拉斯积分

2 拉普拉斯变换

1 拉普拉斯积分

（1）拉普拉斯积分的概念

定义 2.1 称含复参变量 s 的广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

为拉普拉斯积分.

例 2.1 求单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t \geq 0;\\ 0\ , & t<0.\end{cases}$$

的拉普拉斯积分.

解 因为

$$\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-sb})$$

所以，当且仅当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

例 2.2 求指数函数

$$f^*(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$$

的拉普拉斯积分(其中α为任意复常数).

解 $$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s-\alpha}(\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\alpha)).$$

例 2.3 求正弦函数

$$f^*(t)=\sin kt$$

的拉普拉斯积分(其中k为任意复常数).

解 $$\int_0^{+\infty}\sin kt\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{1}{s-\mathrm{i}k}-\frac{1}{s+\mathrm{i}k})$$

$$(\mathrm{Re}(s-\mathrm{i}k)>0\text{且}\mathrm{Re}(s+\mathrm{i}k)>0)$$

$$=\frac{k^2}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Re}(-\mathrm{i}k)|).$$

（2）拉普拉斯积分存在定理

定理 2.1 若函数$f^*(t)$在区间$[0,+\infty)$上满足下列条件:

(1) $f^*(t)$在任一有限区间上分段连续;

(2) 存在着常数$M>0,c_0>0$,使得

$$|f^*(t)|<M\mathrm{e}^{c_0 t},$$

则在半平面$\mathrm{Re}(s)=c>c_0$上,积分

$$\int_0^{+\infty}f^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

存在,由此积分所确定的函数$F(s)$解析.

证 由条件(2)可知,当$\mathrm{Re}(s)=c>c_0$时,

$$\left|\int_0^{+\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} | f^*(t)\mathrm{e}^{-st} |\mathrm{d}t$$
$$< M\int_0^{+\infty} | \mathrm{e}^{-(s-c_0)t} |\mathrm{d}t$$
$$= M\int_0^{+\infty} | \mathrm{e}^{-(c-c_0)t} |\mathrm{d}t$$
$$= \frac{M}{c-c_0}.$$

所以$\int_0^{+\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}(s) > c_0$时收敛,即该积分存在.

又因为

$$\int_0^{+\infty} | tf^*(t)\mathrm{e}^{-st} |\mathrm{d}t \le M\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(c-c_0)t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{M}{(c-c_0)^2} \quad .$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\int_0^{+\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t]$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f^*(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} -tf^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

所以$F(s)$在半平面$\mathrm{Re}(s) > c_0$上可导,解析.

例 2.4 求幂函数$f^*(t) = t^m$(常数$m > -1$)的拉普拉斯积分.

解 由于 s 为右半平面的任一复数，设 $s = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$，$z = st$，则

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^m\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} z^m \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$$

上式右边的积分路线为从原点出发，沿直线BA至无穷远点（见图 2.1）

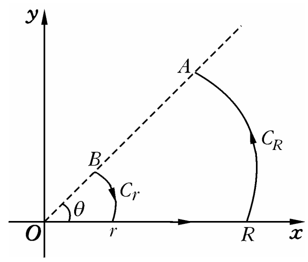


图 2.1

由于$z^m \mathrm{e}^{-z}$在除原点外的复平面上解析，故由柯西定理知

$$\Big(\int\limits_{AB}+\int\limits_{C_r}+\int\limits_{rR}+\int\limits_{C_R}\Big)z^m \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\int_B^A z^m \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z=\Big(\int\limits_{C_r}+\int_r^R+\int\limits_{C_R}\Big)z^m \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z. \qquad (2.2)$$

因为

$$\Big|\int\limits_{C_R} z^m \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z\Big|\le \int\limits_{C_R}|z^m \mathrm{e}^{-z}|\mathrm{d}z$$

$$=\int\limits_{C_R}|z|^m|\mathrm{e}^{-(R\cos\theta+\mathrm{i}R\sin\theta)}|\mathrm{d}s$$

$$=R^m\int\limits_{C_R}\mathrm{e}^{-R\cos\theta}\,\mathrm{d}s$$

$$=R^{m+1}\mathrm{e}^{-R\cos\theta}\,\theta\to 0 \quad (R\to+\infty),$$

同理可得

$$\Big|\int\limits_{C_r} z^m \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z\Big|\le r^{m+1}\mathrm{e}^{-r\cos\theta}\,\theta\to 0 \quad (r\to 0^+)$$

在式（2.2）两边同时令$R\to+\infty$，$r\to 0^+$得

$$\int_0^{\infty} z^m \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(m+1)$$

故

$$\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}z = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

特别地，当m为非负整数时，由于

$$\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m\int_0^{+\infty} x^{m-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \cdots$$
$$= m!.$$

得

$$\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}z = \frac{m!}{s^{m+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

当$m = -\dfrac{1}{2}$时，由于

$$\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad (u = \sqrt{x})$$
$$= \sqrt{\pi},$$

得

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

2 拉普拉斯变换

定义 2.2 设$f(t)$为定义在$(0, +\infty)$上的实值(或复值)函数,其收敛的拉普拉斯积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (s\text{为复参量}) \tag{2.3}$$

建立的从$f(t)$到$F(s)$的对应称作拉普拉斯变换(简称拉氏变换). 用字母 L 表达,即

$$F(s) = \mathrm{L}[f(t)]. \tag{2.4}$$

称$f(t)$为 L 变换的像原函数, $F(s)$为 L 变换的像函数.

例 2.5 求函数$f(t) = \mathrm{ch}\,kt$的拉普拉斯变换(其中k为任意复常数).

解　$[\operatorname{ch} kt]=\int_0^{+\infty}\operatorname{ch} kt\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{kt}+\mathrm{e}^{-kt}}{2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)$$

$$=\frac{s}{s^2-k^2}\qquad(\operatorname{Re}(s)>|\operatorname{Re}(k)|).$$

例 2.6 求δ函数的拉普拉斯变换

解 在具体求解题目之前, 需先就拉普拉斯变换中积分下限的问题加经澄清. 由于

$$\mathrm{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\ \mathrm{L}_+[f(t)].$$

所以当$f(t)$满足拉氏积分存在定理的条件, 且在$t=0$附近有界时, $\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=0$, 即

$$\mathrm{L}_-[f(t)]=\mathrm{L}_+[f(t)].$$

当$f(t)$在$t=0$处包含一个δ函数时，$\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\neq 0$, 即

$$\mathrm{L}_-[f(t)]\neq\mathrm{L}_+[f(t)].$$

为此, 将进行拉氏变换的函数$f(t)$, 当$t\geq 0$时的定义扩大到当$t>0$及$t=0$的某邻域内. 这样拉氏变换的定义$\mathrm{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$应为$\mathrm{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$.
为书写简便, 该定义仍写为原来的形式.

根据上面的陈述及δ函数的筛选性质易得

$$\mathrm{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= 1.$$

如果脉冲出现在$t = t_0$时刻$(t_0 > 0)$，有

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t - t_0) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{e}^{-st_0}.$$

例 2.7 求函数

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \delta(t) - \beta \mathrm{e}^{-\beta t} u(t) \qquad (\beta > 0)$$

的拉氏变换.

解 $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}_{-}[f(t)]$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} [\mathrm{e}^{-\beta t} \delta(t) - \beta \mathrm{e}^{-\beta t} u(t)] \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\beta+s)t} \delta(t) \mathrm{d}t - \int_{0}^{+\infty} \beta \mathrm{e}^{-(\beta+s)t} \mathrm{d}t$$
$$= 1 - \frac{\beta}{s+\beta}$$
$$= \frac{s}{s+\beta} \qquad (\mathrm{Re}(s) > -\beta).$$

2.2 拉普拉斯逆变换

定义 2.3 若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s \qquad (\alpha\text{为}s\text{的实部})$$

建立的 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的对应称作拉普拉斯逆变换(简称拉氏逆变换). 用字母 $\mathcal{L}^{-1}$ 表达, 即

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

它与拉氏变换构成了一个拉氏变换对.

定理 2.2 若 $f(t)$ 满足拉氏积分存在定理的条件，$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$.那么,当 $\mathrm{Re}(s)=\alpha>c_0$ 时，在 $f(t)$ 的连续点处有反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s.$$

在 $f(t)$ 的间断点处, 上式右端收敛于 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

证明从略.

定理 2.3 若 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是函数 $F(s)$ 的所有奇点(适当选取 α 使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(s)<\alpha$ 的范围内), 且当 $s\to\infty$ 时， $F(s)\to 0$，则有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\,s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[F(s)\,\mathrm{e}^{st},s_k],$$

即

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[F(s)\,\mathrm{e}^{st},s_k] \quad (t>0). \qquad (2.10)$$

证 作如图 2.2 所示闭曲线

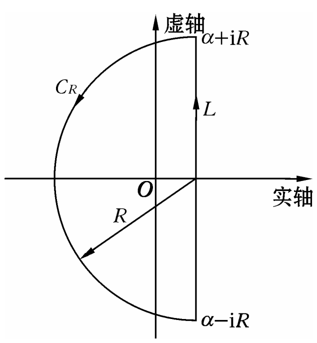


图 2.2

$C=L+C_R$，C_R是半径为R的圆弧，当R充分大后，$F(s)$的所有奇点包含在C围成的区域内. 由留数定理可得

$$\int_C F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k],$$

根据推广的约当定理，当$t>0$，$R\to+\infty$ 时，

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=0,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k]-\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k]$$

故

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k].$$

例 2.8 求$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16}]$.

解 $\because \mathrm{Res}[\dfrac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16},\ 4\mathrm{i}]=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{(t-2)s}\ |_{s=4\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4(t-2)\mathrm{i}}$,

$$\mathrm{Res}[\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16},\ -4\mathrm{i}]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(t-2)s}\ |_{s=-4\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4(t-2)\mathrm{i}}.$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16}]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16}\mathrm{e}^{st},s_k]$$

$$=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{4(t-2)\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-4(t-2)\mathrm{i}}]$$
$$=\cos 4(t-2) \qquad (t>2).$$

例 2.9 求函数

$$F(s)=\frac{\beta}{s^2(s^2+\beta^2)}$$

的拉氏逆变换.

解 $\because \operatorname{Res}[\frac{\beta\mathrm{e}^{st}}{s^2(s^2+\beta^2)},\ 0]$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2\cdot\frac{\beta}{s^2(s^2+\beta^2)}\mathrm{e}^{st}]=\frac{t}{\beta}$$

$$\operatorname{Res}[\frac{\beta\mathrm{e}^{st}}{s^2(s^2+\beta^2)},\ \beta\mathrm{i}]=\left.\frac{\beta\mathrm{e}^{st}}{4s^3+2s\beta^2}\right|_{s=\beta\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}}{2\mathrm{i}\beta^2},$$

$$\operatorname{Res}[\frac{\beta\mathrm{e}^{st}}{s^2(s^2+\beta^2)},\ -\beta\mathrm{i}]=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}}{2\mathrm{i}\beta^2}.$$

$$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{t}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{t}{\beta}-\frac{\sin\beta t}{\beta^2}$$

2.3 拉普拉斯变换的性质

1. 线性性质

2. 微分性质

3. 积分性质

4. 延迟性质

5. 位移性质

6. 卷积与卷积定理

1. 线性性质

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{L}[f(t)]+\beta\mathcal{L}[g(t)]; \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s)+\beta G(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[G(s)]. \quad (2.12)$$

其中 α,β是常数.

例 2.10 求函数

$$f(t)=\sin kt+\cos kt+\mathrm{e}^{kt}$$

的拉氏变换.

解 由式(2.11)及拉氏变换表知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)]&=\mathcal{L}[\sin kt]+\mathcal{L}[\cos kt]+\mathcal{L}[\mathrm{e}^{kt}]\\&=\frac{s+k}{s^2+k^2}+\frac{1}{s-k}\quad (\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Re}(k)|).\end{aligned}$$

例 2.11 求函数

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)}\quad (a\neq b)$$

的拉氏逆变换.

解 因为

$$F(s)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right),$$

所以, 由式(2.12)及拉氏变换表知 插入式 2.12

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]&=\frac{1}{a-b}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}\\&=\frac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt})\\&\qquad [\mathrm{Re}(s)>\max(\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b))].\end{aligned}$$

例 2.12 求函数

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

的拉氏逆变换.

解　因为

$$F(s)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{s}{s^2+b^2}\right),$$

所以，由式(2.12)及拉氏变换表知　　插入式 2.12

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{b^2-a^2}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$$

$$[\mathrm{Re}(s)>\max(|\mathrm{Re}(\mathrm{i}a)|,|\mathrm{Re}(\mathrm{i}b)|)].$$

2. 微分性质

(1) 像原函数的微分性质

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0);\qquad(2.13)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{n-1}(0)$$

$$(\mathrm{Re}(s)>c_0).\qquad(2.14)$$

(2) 像函数的微分性质

$$F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]\qquad(\mathrm{Re}(s)>c_0);\qquad(2.15)$$

$$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}[(-t)^nf(t)]\qquad(\mathrm{Re}(s)>c_0).\qquad(2.16)$$

证　(1) $\because \mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$

$$=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0).$$

$$\therefore\ \mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

若反复利用上式可得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}[f'(t)] &= \mathrm{L}\{[f'(t)]'\} \\
&= s\,\mathrm{L}[f'(t)] - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0),
\end{aligned}
$$

……

$$
\mathrm{L}[f^{(n)}(t)]
$$

$$
= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)
$$

$$
(\mathrm{Re}(s) > c_0).
$$

(2) 由于$F(s)$在$\mathrm{Re}(s) > c_0$内解析,因而

$$
\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} -tf(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{L}[-tf(t)],
\end{aligned}
$$

用同样的方法可得:

$$
F''(s) = \mathrm{L}[(-t)^2 f(t)],
$$

……

$$
F^{(n)}(s) = \mathrm{L}[(-t)^n f(t)].
$$

例 2.13 求函数

$$
f(t) = \sin kt
$$

的拉氏变换.

解 $\because$ $(\sin kt)'' = -k^2 \sin kt$

$$
\mathrm{L}\left[(\sin kt)''\right] = \mathrm{L}\left[-k^2 \sin kt\right]
$$

$$\therefore \quad s^2 \mathrm{L}[\sin kt] - s\sin 0 - \sin' 0 = -k^2 \mathrm{L}[\sin kt].$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$(\mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Re}(\mathrm{i}k)|), k \text{ 为实数时 } (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

例 2.14 求函数

$$f(t) = t^2 \cos kt$$

的拉氏变换.

解 $\because \mathrm{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$,

由式(2.16)得

$$\mathrm{L}[t^2 \cos kt] = \mathrm{L}[(-t)^2 \cos kt]$$

这里需插入式 2.16

$$= \left(\frac{s}{s^2 + k^2}\right)''$$

$$= \frac{2s^3 - 6sk^2}{(s^2 + k^2)^3}$$

$$(\mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Re}(\mathrm{i}k)|),\ k \text{ 为实数时 } (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

例 2.15 求函数

$$F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$$

的拉氏逆变换.

解 $\because F'(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s-1}$, $\quad \mathrm{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t)$,

需插入 2.15 式

$$\therefore \quad f(t) = -\frac{1}{t} \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right].$$

查拉氏变换表得

$$f(t)=\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})=\frac{2}{t}\operatorname{sh}t \quad (\operatorname{Re}(s)>1).$$

3. 积分性质

(1) 原函数的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s); \tag{2.17}$$

$$\mathcal{L}\Big[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t}_{n\text{次}}\Big]=\frac{1}{s^n}F(s). \tag{2.18}$$

(2) 函数的积分性质

$$\mathcal{L}\left[f(t)/t\right]=\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s; \tag{2.19}$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)/t^n\right]=\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s}_{n\text{次}}. \tag{2.20}$$

证 (1) 设 $h(t)=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $h'(t)=f(t)$，$h(0)=0$.

由微分性质公式(2.13)得

$$\mathcal{L}[h'(t)]=s\mathcal{L}[h(t)]-h(0),$$ 这里插入式 2.13,2.17

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

重复应用式(2.17)，可得

$$\mathcal{L}\Big[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\,\mathrm{d}t\Big]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

(2) 设 $G(s)=\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$，则 $G'(s)=-F(s)$.

由微分性质公式(2.15)得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}[-G'(s)]=t\mathcal{L}^{-1}[G(s)],$$ 插入式 2.15

所以

$$G(s)=\mathcal{L}\left[f(t)/t\right]$$

即

$$\int_{s}^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{L}\left[f(t)/t\right].$$

当$s=0$时, 有

$$\int_{0}^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-0t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

重复利用式(2. 19), 可得　　　　　　　　　插入式 2. 19

$$\mathrm{L}\left[f(t)/t^{n}\right] = \underbrace{\int_{s}^{\infty}\mathrm{d}s\int_{s}^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_{s}^{\infty}}_{n次} F(s)\,\mathrm{d}s.$$

例 2. 16 求函数

$$f(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

的拉氏变换.

解　由式(2. 17)得　　　　　　　　　插入式 2. 17

$$\mathrm{L}[f(t)] = \mathrm{L}\left[\int_{0}^{t}\frac{\sin\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathrm{L}[\sin t/t],$$

又由式(2.19)得　　　　　　　　　插入式 2.19

$$\mathrm{L}[\sin t/t] = \int_{s}^{\infty}\mathrm{L}[\sin t]\,\mathrm{d}s = \int_{s}^{\infty}\frac{1}{s^{2}+1}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

故

$$\mathrm{L}\left[\int_{0}^{t}\frac{\sin\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right).$$

顺便可得　　　　　　　　　插入本页第 6 行式的用等号连的首尾

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{s^{2}+1}\,\mathrm{d}s$$

$$= \arctan s\,\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

例 2.17 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$$

解 $\because \int_0^{+\infty} f(t)dt=\int_0^{\infty}F(s)ds$,

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_0^{\infty} \mathcal{L}[e^{-at}-e^{-bt}]ds$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\ln\frac{b}{a}.$$

4. 延迟性质

若$t<0$时，$f(t)=0$, 则对任一非负实数t_0有

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s), \tag{2.21}$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_0}F(s)]=f(t-t_0).$$

证 因为

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)]=\int_0^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$$

$$=\int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt \quad (t<0\text{时}f(t)=0)$$

$$=e^{-st_0}\int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}d(t-t_0)$$

$$=e^{-st_0}\int_{t_0}^{+\infty} f(u)e^{-su}du \qquad (u=t-t_0)$$

$$=e^{-st_0}F(s).$$

故等到式成立.

例 2.18 求函数

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\geq t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

的拉氏变换.

解　由于

$$\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$

故由延迟性质得　　　　　　　　　　　　　　　　插入 2.21

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0}.$$

例 2.19 求如图 2.3 所示阶梯函数 $f(t)$ 的拉氏变换.

解 利用单位阶跃函数, 可将这个函数表示为

$$\begin{aligned}f(t)&=Au(t)+Au(t-t_0)+Au(t-2t_0)+\cdots\\&=A[u(t)+u(t-t_0)+u(t-2t_0)+\cdots]\end{aligned}$$

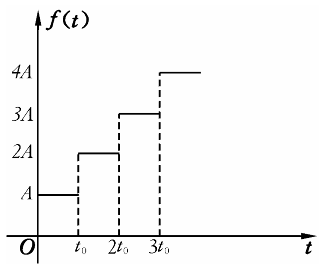


图 2.3

再由线性性质和延迟性质可得　插入式 2.21

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)]&=A(\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2st_0}+\cdots)\\&=\frac{A}{s}(1+\mathrm{e}^{-st_0}+\mathrm{e}^{-2st_0}+\cdots)\end{aligned}$$

应用延迟性质, 我们还可以求周期函数的拉氏变换, 即

设 $f_T(t)(t>0)$ 是以 T 为周期的周期函数, 如果

$$f_T(t)=f(t),\quad 0\geq t<T,$$

则

$$[f_T(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-sT}\,\mathrm{d}t\ . \qquad (2.22)$$

事实上, 在第 $k+1$ 个周期内

$$f_T(t)=f(t-kT),\quad kT\geq t<(k+1)T,$$

不妨设在$t\geq T$上有$f(t)=0$, 应用延迟性质得

$$\mathcal{L}[f(t-kT)]=\mathrm{e}^{-skT}\mathcal{L}[f(t)],$$

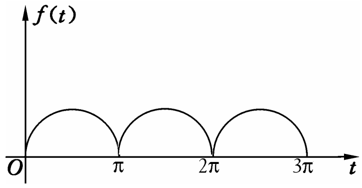
因此

$$\mathcal{L}[f_T(t)]=\mathcal{L}[\sum_{k=0}^{\infty}f(t-kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}[f(t-kT)]$$

$$=\mathcal{L}[f(t)]\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-skT}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-skT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

例 2.20 求全波整流函数$f(t)=|\sin t|\ (t>0)$的拉氏变换(如图2.4).

解　由式(2.22)知插入式 2.22



$$\mathcal{L}[|\sin t|]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+1}(-s\sin t-\cos t)]_0^{\pi}$$

图 2.4

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}\mathrm{cth}\frac{\pi s}{2}.$$

例 2.21 求函数

$$F(s)=\frac{s\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+16}$$

的拉氏逆变换.

解　因为

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+16}]=\cos 4t\qquad(\mathrm{Re}(s)>0),$$

$$F(s)=\mathrm{e}^{-2s}\frac{s}{s^2+16},$$

由式(2.21)知 插入式 2.21

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\begin{cases}\cos 4(t-2), & t\geq 2;\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

5. 位移性质

$$F(s-a)=\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)], \tag{2.23}$$

或

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}f(t).$$

证 由拉氏变换定义知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t\\&=F(s-a)\quad(\mathrm{Re}(s-a)>0).\end{aligned}$$

例 2.22 求函数

$$f(t)=\int_0^t t\,\mathrm{e}^{at}\sin at\,\mathrm{d}t$$

的拉氏变换.

解 $\because$ $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[\int_0^t t\,\mathrm{e}^{at}\sin at\,\mathrm{d}t]$

$$=\frac{1}{s}\mathcal{L}[t\,\mathrm{e}^{at}\sin at],$$ (积分性质) 插入式 2.17

$$\mathcal{L}[t\sin at]=-\{\mathcal{L}[\sin at]\}'$$ (微分性质) 插入式 2.15

$$=-\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'=-\frac{2as}{(s^2+a^2)^2},$$

$$\mathcal{L}[t\,\mathrm{e}^{at}\sin at]=\frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}$$ (位移性质) 插入式 2.23

$$\therefore\ \mathcal{L}[\int_0^t t\,\mathrm{e}^{at}\sin at\,\mathrm{d}t]=\frac{2as-2a^2}{s(s^2-2as+2a^2)^2}.$$

例 2.23 求函数

$$F(s)=\frac{2s+5}{(s+2)^2+3^2}$$

的拉氏逆变换.

解 $\because F(s)=\dfrac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}$

$$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}]$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{2s+1}{s^2+3^2}]$$ (位移性质) 插入式 2.23

$$=\mathrm{e}^{-2t}\{2\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+3^2}]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s^2+3^2}]\},$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}(2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t).$$ （查表）

6. 卷积与卷积定理

定义 2.3 若给定的两个函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 在 $t<0$ 时均为零, 则积分

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.25}$$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积, 记作 $f_1(t)*f_2(t)$, 即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

卷积运算满足交换律、结合律、分配律:

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=\left[f_1(t)*f_2(t)\right]*f_3(t)$$

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

例 2.24 设函数

$$f_1(t)=\begin{cases}t, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

求 $f_1(t)*f_2(t)$.

解 依卷积定义，有

$$\begin{aligned}f_1(t)*f_2(t)&=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\\ &=\tau\cos(t-\tau)\,|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\\ &=t+\sin(t-\tau)\,|_0^t\\ &=t-\sin t.\end{aligned}$$

定理 2.4（卷积定理）

若 $F_1(s)=\mathrm{L}[f_1(t)]$, $F_2(s)=\mathrm{L}[f_2(t)]$, 则

$$\mathrm{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s),\tag{2.26}$$

或

$$\mathrm{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t).$$

证 由 $t<0$ 时, $f_1(t)=f_2(t)=0$ 得

$$F_1(s)F_2(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\,\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-su}f_2(u)\,\mathrm{d}\,u$$

令 $u=t-\tau$ 引入变量 t,

$$\begin{aligned}F_1(s)F_2(s)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,t]\,\mathrm{d}\,\tau.\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau]\,\mathrm{d}\,t.\end{aligned}$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, & t \geq 0; \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}[f_1(t) * f_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]. \end{aligned}$$

例 2.25 求函数

$$F(s) = \frac{1}{s^2(1+s^2)}$$

拉氏逆变换.

解 $\because F(s) = \dfrac{1}{s^2}\dfrac{1}{s^2+1}$,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] = t, \qquad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] = \sin t.$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1}] \\ &= t * \sin t \quad \text{（卷积定理）} \\ &= t - \sin t. \end{aligned}$$

插入式 2.26

例 2.26 求函数

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$$

拉氏逆变换.

解 $\because F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2+3^2} \cdot \dfrac{1}{(s+2)^2+3^2}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t.$$（位移性质）插入式 2.23

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{9}(\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t)*(\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t)$$（卷积定理）

$$=\frac{1}{9}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\sin 3\tau\,\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\sin(3t-3\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t \sin 3\tau\sin(3t-3\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{18}\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t [\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{18}\mathrm{e}^{-2t}\left[\frac{\sin(6\tau-3t)}{6}-\tau\cos 3t\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{54}\mathrm{e}^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

例 2.27 求积分方程

$$y(t)=at+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

的解.

解 $\because \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=y(t)*\sin t$

$\therefore \mathcal{L}[y(t)]=a\mathcal{L}[t]+\mathcal{L}[y(t)*\sin t].$ 插入式 2. 26

$$\mathcal{L}[y(t)]=\frac{a}{s^2}+\mathcal{L}[y(t)]\cdot\mathcal{L}[\sin t]$$（卷积定理）

$$\therefore \mathcal{L}[y(t)]=\frac{a}{s^2}+\mathcal{L}[y(t)]\big/s^2+1$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^4}+\frac{a}{s^2}\right]$$

$$=a(t+\frac{1}{6}t^3).$$

拉普拉斯变换性质一览表

性质	$f(t)$	$F(s)$
线性	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(s)+\beta G(s)$
位移	$\mathrm{e}^{at} f(t)$	$F(s-a)$
延迟	$f(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-st_0} F(s)$
微分	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{n-1}(0)$
	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
积分	$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t}_{n}$	$\frac{1}{s^n}F(s)$
	$f(t)/t^n$	$\underbrace{\int_s^\infty \mathrm{d}s\int_s^\infty \mathrm{d}s\cdots\int_s^\infty F(s)\,\mathrm{d}s}_{n}$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$

2.4 拉普拉斯变换的应用

1 解常系数线性微分方程

2 解常系数微分方程组

1 解常系数线性微分方程

初值问题

例 2.28 求 $y'''+3y''+3y'+y=1$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的特解.

解 设 $\mathrm{L}[y(t)]=Y(s)$,方程两边同取拉氏变换,由拉氏变换的微分性质并考虑初始条件得像方程: 插入式 2.14

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s},$$

于是

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3},$$

取逆变换,得

$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-t}-t\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t}.$$

例 2.29 求 $y'+y=u(t-b)\ \ (b>0)$ 满足初始条件 $y(0)=y_0$ 的特解.

解 $\because\ sY(s)-y_0+Y(s)=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-bs}$

$$\therefore\ Y(s)=\frac{\mathrm{e}^{-bs}}{s(s+1)}+\frac{y_0}{s+1},$$

$$\therefore\ y(t)=[1-\mathrm{e}^{-(t-b)}]u(t-b)+y_0\,\mathrm{e}^{-t}$$

$$=\begin{cases} y_0\,\mathrm{e}^{-t}, & 0<t\le b; \\ 1+(y_0-\mathrm{e}^{b})\mathrm{e}^{-t} & t>b. \end{cases}$$

例 2.30 如图 2.5 所示的电路中,当$t=0$时,开关k闭合,接入信号源$e(t)=E_0\sin\omega t$，电感起始电流等于零,求i(t).

解 根据基尔霍夫定律有$I(0)=0$，且

$$LI'(t)+RI(t)=E_0\sin\omega t$$

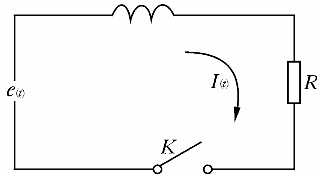


图 2.5

设 L$[I(t)]=I(s)$，则

$$LsI(s)+RI(s)=E_0\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\therefore\ I(s)=\frac{E_0\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}$$

$$=\frac{E_0}{L}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}。$$

取逆变换，并根据卷积定理，可得

$$I(t)=\frac{E_0}{L}(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}*\sin\omega t)$$

$$=\frac{E_0}{L}\int_0^t\sin\omega\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\mathrm{d}\,\tau$$

$$=\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\frac{E_0\omega L}{R^2+L^2\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}.$$

例 2.31 质量为m的物体挂在弹簧系数为k的弹簧的一端(如图 2.6),作用在物体上的外力为$F_x(t)$.若物体自静止平衡位置$x=0$处开始运动,求该物体的运动规律$x(t)$.

解 根据牛顿定律，有　　　　　　　此处有图 2..6

$$mx''(t)=F_x(t)-kx(t)$$

其中$-kx(t)$是弹簧恢复力，且$x(0)=x'(0)=0$.

设$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$，$\mathcal{L}[F_x(t)]=F(s)$,则

$$ms^2X(s)+kX(s)=F(s),$$

若记$\omega_0=\dfrac{k}{m}$,则有

$$X(s)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+\omega_0{}^2}\cdot F(s),$$

根据卷积定理,得

$$x(t)=\frac{1}{m}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+\omega_0{}^2}]*\mathcal{L}^{-1}F(s)$$

$$=\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t F_z(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

边值问题

例 2.32 求 $y''-2y'+y=0$满足初始条件$y(0)=0, y(1)=2$的特解.

解 $\because s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2sY(s)+2y(0)+Y(s)=0,$

$$\therefore\ Y(s)=\frac{y'(0)}{(s-1)^2},$$

$$y(t)=y'(0)t\,\mathrm{e}^t,$$

用$y(1)=2$代入上式得

$$2=y(1)=y'(0)\,\mathrm{e},$$

$$\therefore\ y'(0)=2\,\mathrm{e}^{-1},$$

$$\therefore\ y'(t)=2t\,\mathrm{e}^{t-1}.$$

2. 解常系数线性微分方程组

例 2.33 求$\begin{cases}x'+y+z'=1,\\ x+y'+z=0,\\ y+4z'=0\end{cases}$满足$x(0)=y(0)=z(0)=0$的解.

解 设 $\mathrm{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathrm{L}[y(t)]=Y(s)$, $\mathrm{L}[z(t)]=Z(s)$对方程组中每个方程两边取拉氏变换,得像方程组:

$$\begin{cases}sX(s)+Y(s)+sZ(s)=\dfrac{1}{\mathrm{s}},\\ X(s)+sY(s)+Z(s)=0,\\ \qquad Y(s)+4Z(s)=0.\end{cases}$$

解此方程组，并取逆变换得

$$X(s)=\frac{4s^2-1}{4s^2(s^2-1)},$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{4s^2-1}{4s^2(s^2-1)}]=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s^2-1}+\frac{1}{s^2}]$$

$$=\frac{1}{4}(3\operatorname{sh}t+t),$$

$$Y(s)=-\frac{1}{s(s^2-1)} \quad ,$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{s(s^2-1)}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}]$$

$$=1-\operatorname{ch}t,$$

$$Z(s)=\frac{1}{4s^2(s^2-1)},$$

$$z(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{4s^2(s^2-1)}]=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}]$$

$$=\frac{1}{4}(\operatorname{sh}t-t).$$

例 2.34 求下面方程组的解，

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^t-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}.$$

解 $\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$.则

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{\mathrm{s}-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

解方程并求逆变换得：

$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2},$$

$$x(t)=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}[\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}]+\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}[\frac{2s-1}{s^2}\mathrm{e}^{st}]$$

$$=\lim_{s\to 0}[t\,\mathrm{e}^{st}\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}-\frac{2s}{(s-1)^3}\mathrm{e}^{st}]$$

$$+\lim_{s\to 1}[t\,\mathrm{e}^{st}\frac{2s-1}{s^2}+\frac{2(1-s)}{s^3}\mathrm{e}^{st}]$$

$$=-t+t\,\mathrm{e}^t,$$

$$Y(s)=-\frac{1}{s(s-1)^2},$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}]$$

$$=1+t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t,$$

5 习 题

2.1.1 由定义分别直接计算下列各函数的拉氏变换.

(a) $f(t)=\cos t\delta(t)-\sin tu(t)$;

(b) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi;\\ 0\ , & t\le 0,\text{或}\ t\ge\pi.\end{cases}$

(c) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<2;\\ -1 & 2\le t<4;\\ 0\ , & t>4.\end{cases}$

2.2.1 利用留数，求下列函数的拉氏逆变换。

(a) $\dfrac{1}{s^3(s-a)}$; (b) $\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$; (c) $\dfrac{s+2}{s^3(s-1)^2}$.

2.3.1 利用拉氏变换的性质及拉氏变换表求下列函数的拉氏变换。

(a) $\cos\alpha t\cos\beta t$; (b) $u(t-1)-u(t-2)$;

(c) $3\sqrt[3]{t}+\mathrm{e}^{2t}$; (d) $\mathrm{e}^{2t}+5\delta(t)$;

2.3.2 设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ 证明

(a) $\mathcal{L}^{-1}[F(bs)]=\dfrac{1}{b}f(\dfrac{t}{b})\quad (b>0)$

(b) $\mathcal{L}[f(at-b)u(at-b)]=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s}\quad (a>0,b>0)$

并由此性质计算 $\mathcal{L}[\sin(\omega t+\varphi)u(\omega t+\varphi)]\quad (\omega>0,\varphi<0)$。

2.3.3 求下列函数的拉氏变换。

(a) $\sin(t-2)$; (b) $\sin(t-2)u(t-2)$;

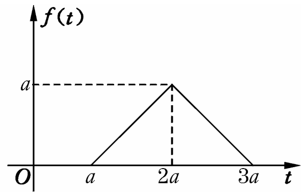
(c) $\sin tu(t-2)$; (d) $\mathrm{e}^{2t}u(t-2)$;

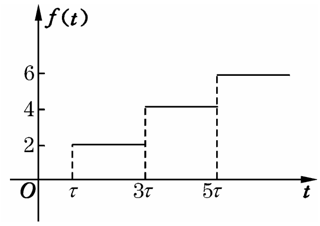
(e) $(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$;

2.3.4 利用延迟性质，求下列函数的拉氏逆变换。

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^{-5s+1}}{s}$;　(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2-4}$;　(c) $\dfrac{2s^2\mathrm{e}^{-s}-(s+1)\mathrm{e}^{-2s}}{s^3}$.

2.3.5 用单位阶跃函数把下列各图所示的函数表示出来，并求其拉氏变换。





2.3.6 利用拉氏变换的性质，求下列函数的拉氏变换。

(a) $(t-1)^2\mathrm{e}^t$;　(b) $\mathrm{e}^{-(t+\alpha)}\cos\beta t$;　(c) $\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}f(\frac{t}{a})\quad(a>0)$;

(d) $t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$;　(e) $\dfrac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}$;　(f) $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$;

(g) $\dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{\sqrt{t}}$;　(h) $u(1-\mathrm{e}^{-t})$;　(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathrm{e}^{-t}\sin t)$;

(j) $t\int_0^t \mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$;　(k) $\int_0^t t\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$;　(l) $\int_0^t \dfrac{\mathrm{e}^t-\cos 2t}{t}\mathrm{d}t$.

2.3.7 计算下列积分：

(a) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$;　(b) $\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$;

(c) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}\,\mathrm{sh}t\sin t}{t}\mathrm{d}t$;　(d) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$;

(e) $\int_0^{+\infty}t^3\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$;　(f) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$.

2.3.8 利用拉氏变换的性质，求下列函数的拉氏逆变换。

(a) $\frac{2s+3}{s^2+9}$;　　(b) $\frac{1}{(s+2)^4}$;

(c) $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$;　(d) $\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$;

(e) $\frac{7}{\sqrt{s+3}}$;　　(f) $\frac{s-s\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2+\pi^2}$.

2.3.9 求下列各函数拉氏逆变换的初值与终值：

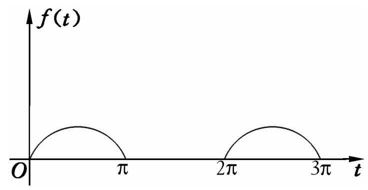
(a) $\frac{s+6}{(s+2)(s+5)}$;　(b) $\frac{10(s+2)}{s(s+5)}$; ;

(c) $\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$;　(d) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$.

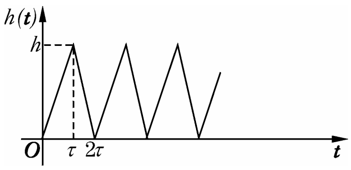
2.3.10 求下列周期函数的拉氏变换。

(a) 周期为2π的半波整流正弦波函数；

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 2k\pi \le t \le (2k+1)\pi\,; \\ 0, & (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi\end{cases} \quad k=0,1,2,\cdots\,;$$



(b) 周期为2τ,齿高为h的三角冲击波函数$h(t)$.



2.3.11 求下列函数的拉氏逆变换。

(a) $\frac{s}{s+2}$;　　(b) $\frac{1}{s(s^2-a^2)}$;

(c) $\dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$； (d) $\dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$.

2.3.12 求下列函数的卷积。

(a) $e^{at}*(1-at)$; (b) $t^m * t^n\ \ (m,n\text{为整数})$;

(c) $\sin t*\cos t$; (d) $t*\mathrm{sh}\,t$; (e) $u(t-a)*f(t)$;

(f) $\delta(t-a)*f(t)$;

2.3.13 利用卷积定理，求下列各函数的拉氏逆变换。

(a) $\dfrac{a}{(a^2+s^2)s}$; (b) $\dfrac{s}{(s-a)^2(s-b)}$; (c) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$.

2.3.14 利用卷积定理，证明：

(a) $\mathcal{L}[\int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t]=\dfrac{F(s)}{s}$; (b) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}]=\dfrac{t}{2a}\sin at$.

2.4.1 求下列常微分方程的解：

(a) $y'-y=e^{2t}+t,\quad y(0)=0$;

(b) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t,\quad y(0)=-1, y'(0)=-2$;

(c) $y''+3y'+2y=u(t-1),\quad y(0)=0, y'(0)=1$;

(d) $y'''+y'=1,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(e) $y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t},\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(f)

$y^{(4)}+2y'''-2y'-y=\delta(t), (0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$;

(g)

$y^{(4)}+2y''+y=t\cos t, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=2, y'''(0)=\dfrac{1}{4}$

2.4.2 求下列常微分方程组的解.

(a) $\begin{cases} x'+2x+b\int_0^t y\,\mathrm{d}t=-2u(t), \\ x'+y'+y=0, \end{cases}\qquad x(0)=-5,\quad y(0)=6.$

(b) $\begin{cases} x''-x-2y'=\mathrm{e}^t, \\ x'-y''-2y=t^2, \end{cases}$

$$x(0)=-\frac{3}{2},\ x'(0)=\frac{1}{2},\ y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{1}{2}.$$

(c) $\begin{cases} (2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0, \\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0, \end{cases}$

$$x(0)=x'(0)=1,\quad y(0)=y'(0)=0.$$

(d) $\begin{cases} x''-x+y+z=0, \\ x+y''-y+z=0, \\ x+y+z''-z=0, \end{cases}$

$$x(0)=1,\ y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$$

2.4.3 解下列微分积分方程：

(a) $y(t)+\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-t}$;

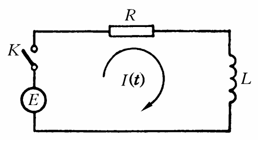
(b) $y'(t)+\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=1,\quad y(0)=0$;

(c) $y(t)=at+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(d) $1-2\sin t-y(t)-\int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\,y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0$.

2.4.4 设在原点处质量为m的一质点，在$t=0$时在x方向上受到冲击力$k\delta(t)$的作用，其中k为常数，假定质点的初速度为零，求其运动规律.

2.4.5 设有如图所示的RL串联电路，在$t=t_0$时接入直流电源E，求电路中的电流$\mathrm{i}(t)$.



2.4.6 利用拉普拉斯变换求解下列边值问题。

(a) $\begin{cases} y''-y=0 \\ y(0)=0, \quad y(2\pi)=1 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x''(t)+x(t)=10\sin 2t \\ x(0)=0, \quad x(\dfrac{\pi}{2})=1 \end{cases}$.

2.4.7 求变系数微分方程：$ty''+2(t-1)y'+(t-2)=0$，满足初始条件 $y(0)=0$ 的解.

*2.4.8 某系统的传递函数 $H(s)=\dfrac{k}{1+Ts}$。求当输入函数 $f(t)=A\sin\omega t$ 时系统的输出函数 $y(t)$.