第一章　基本概念、公理

1-1　概念

1．平衡

平衡就物体（刚体）机械运动的一种特殊形式或称为机械运动的特殊状态。所谓状态是：用来描述某一宏观存在的基本性质的一组参数，该组参数之间满足确定的数学描述（一组特定的数学表达式）。

对于给定的惯性参考系（体），给定的被研究物体（刚体）在惯性参考参考系（体）的机械运动是：物体（刚体）相对给定的惯性参考系（体）静止或作匀速直接运动。则该物体（刚体）处于平衡的（机械运动）状态。

《注：物体的机械运动（物体在三维空间中的位置、形状和大小随时间的变化）存在各种不同的状态。如刚体的平动、定轴转动、定点转动；质点的直线运动、曲线运动、等速运动、加速运动等》。

静止：物体（刚体）的大小、形状及在三维空间占具的位置相对惯性参考系（体）不随时间变化。

匀速直线运动：物体（刚体）上的每一（物质）点相对惯性参考系（体），其随时间的变化规律为：（1）始终保持在一条直线上。（2）任意相同时间间隔的改变量相同。

力的概念：

任何物体（刚体）的运动（包含机械运动），其本质是由于其它物体对其的作用。当某一物体（刚体）或某一组物体（刚体）被选为分析、研究的对象时，实际上就要分析、研究这一物体或一组物体（刚体）与其它物体及其本身内部之间力学相关性质。而重要的是分析、研究是对被选取对象进行的。尽管对被选取的对象，其它物体对其有影响，但分析研究过程并不涉及被选取的研究对象对其它物体的作用所产生的效应。因此在对某一物体（刚体）或某一组物体（刚体）作为被分析、研究对象时，其它物体对被选取的对象的作用，被观注的是其它物体对选取对象的作用，而选取对象对其它物体的作用，只在对其它物体进行分析、研究时才被观注。这就使得能够将其它物体对被选取的分析、研究对象的作用被抽象表示。这种其它物体对被选取的分析、研究对象的作用称为力。当然被选取作为分析、研究对象的一组物体（刚体）内部的各物体（刚体）之间也存在着相互作用，且这种作用同样可以被抽象表示。

力：物体（刚体）之间相互作用的抽象表示。

作用（相互）形式：直接接触作用：点、线、面的直接接触作用；
非直接接触作用：超距作用在物体或刚体的每一点上。

作用（相互）效果：物体的大小、形状和空间位置的改变 —→ 内效应
刚体的空间位置的改变 —→ 外效应

力的抽象表示必须能够完全体现相互作用的形式和效果。即（被抽象表示了的相互作用）力能明确作用的形式、位置；作用的强弱；作用所产生的大小、形状和空间位置的变化情况。

点接触力的三要素：大小、方向、作用点

作用形式：在一确点的两物体（刚体）的直接接触——作用点
作用强弱：大小
作用所产生的大小、形状和空间位置的改变：方向
在数学中，具有一定大小和方向的量可用矢量描述。而在相互作用的抽象表示的力的三要素中也包含了大小和方向。因此力具有数学矢量的特征。所以不同的是，对点接触力，除了大小、方向外，还必须明确点接触力的作用点。且称作用在确定点的，具有确定大小和方向的抽象化的点接触力称为：力矢量。力矢量定义：力矢量是固定作用点的矢量。也称为固定矢量或约束矢量。（点接触）力矢量的表示：按一定长度比例（用来表示大小）的有向（用来表示方向）线段，线段的起点（始点）或未端（终点）表示力的作用点的几何表示方法。有向线段所在的直线称为该（点接触）力的作用线。在分析过程中（点接触）力矢量的符号表示用黑体（粗写体）表示（如 ***F***、***R***、***N*** 等）；而非黑体（如 *F*、*R*、*N* 等）则表示其对应的力矢量的大小。或

$$F = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} \tag{1-1}$$

线直接接触力（线分布力）：在某一直线（或曲线）段上的每一点作用的大小、方向连续分布的点接触力。

面直接接触力（面分布力）：在某一有限平面（或曲面）上的每一点作用的大小、方向连续分布的点接触力。

力系：作用在同一物体（刚体）上的一组（群）力的集合。

（刚体）平衡力系：作用在刚体（或在刚化公理的条件下的形变体）上，且使刚体处于平衡状态的力系。

（刚体）平衡条件：使刚体处于平衡状态时，作用在刚体上的力系所满足的条件。

等效力系：对刚体产生相同力学效果的两个（或一个系列）力系。

超距（体分布）力：在物体的每一点上作用的大小、方向连续分布的另一物体（或一组物体）非直接接触的超距作用。

力的单位：在国际单位制（SI）中，以“N”作为力的单位符号，称作牛（顿）。也常用 10^3N = kN 作为力的单位符号，称作千牛（顿）。

1-2　静力学公理

　　公理是在长期生活和生产实践中长期积累的经验总结，但经过实践的反复检验，被确认在确定的条件下符合客观实际的最普遍、最一般的规律。

公理 1：力的平衡四边形法则

作用在同一物体上、同一点的两个（点接触）力，其对于物体的作用可等效为一个合力。该合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个方向为边构成的平等四边形的对角线确定。如图 1-1 所示。

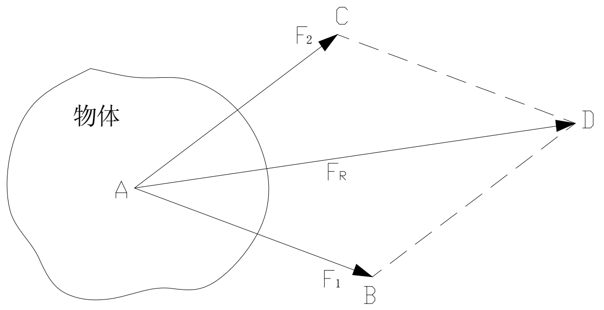


图 1-1

该公理中的合力并不是实际上作用在物体的力，实际作用在物体上的是作用点在 *A* 点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$。而合力只是作用与 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 等效的（产生相同力学效应——外效应、内效应）。假想或虚拟作用在 *A* 点的一种作用。

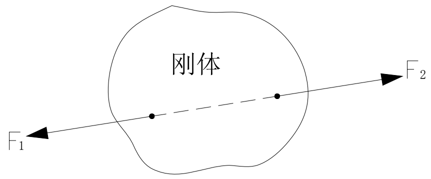
公理中的结论适用于物体，当然也适用刚体。

平行四边形法则的矢量表示式为：

$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2 \qquad (1\text{-}2)$$

平行四边形的几何表示如图 1-1 所示。

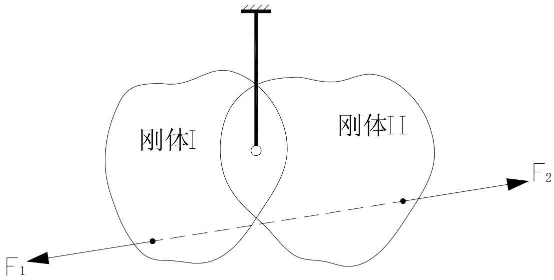
该公理给出了最简单力系的简化规律。这里的简化实质上就是力系之间的相互等效。



公理 2：二力平衡条件

作用在同一刚体上的两个力，刚体在这两个作用下保持平衡（仍然处于平衡状态）的必要、充分条件是：两力的大小相等、方向相反、作用线在同一直线上。由图 1-2（a）可知：

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \qquad (1\text{-}3)$$



值得注意的是该公理只适用于刚体。同时保持刚体平衡的两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 必须作用在同一刚体上。若两个力不是作用在同一刚体上，则尽管两个力满足大小相等、方向相反、作用线在同一直线上，刚体的平衡将可能破坏。如图 1-2（b）所示。

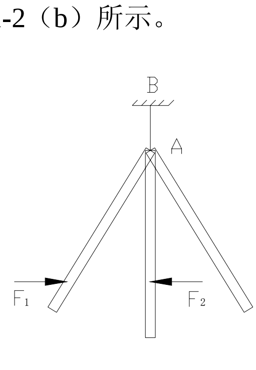
图 1-2

该公理给出了作用在刚体上最简单的平衡力。

公理 3：加减平衡力系公理

在已知作用在同一刚体力系上加上或减去任意平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用。

该公理说明：对作用在同一刚体上的力系，若产生相同的



力学效果，则力系之间只相差一个或几个平衡力系。

该公理同样只对同一刚体适用。如图 1-3 所示。一角形刚体和一直刚体杆在 A 点开孔用绳索穿结固定于 B。在角形刚体和直刚性杆上分别加 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，且

图 1-3

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$$

显然，在 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用下，角形刚体和直刚性杆都将绕 A 点发生转动。这与未加 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 前的静止状态不同。

推论 1：力的可传递性

作用在刚体上某点的力，可沿该力的作用线移到同一刚体上的任意点，且这种移动并不改变该力对刚体的作用效果。

证明：

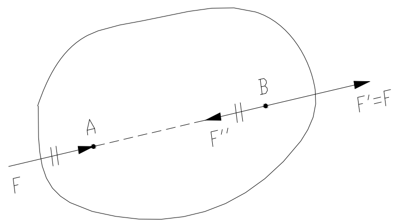


图 1-4

如图 1-4 所示，刚体 A 点处作用有（点接触）力 $\boldsymbol{F}$。设 B 点是力 $\boldsymbol{F}$ 作用线所在直线上的任意一点。由加减平衡力系公理，在 B 点加上平衡力系。到目前已知的平衡力系只有二力平衡公理给出的最简单的平衡力系 $\boldsymbol{F}'$、$\boldsymbol{F}''$（$\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}''$），且满足 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$。在刚体上作用的力系现在是 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$、$\boldsymbol{F}''$ 的集合，且 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$ 方向相反、作用线在同一直线上。因此由二力平衡公理可知，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$ 构成二力平衡力系。由加减平衡力系公理，在刚体上减去 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$ 构成的平衡力系。此时刚体上只存在作用在 B 点的、作用线沿 AB 连线的力 $\boldsymbol{F}''$。且 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$。最终由加减平衡力系公理得到了与作用在 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 具有相同力学效应的作用在 B 点的力 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$。整个应用加减平衡力系公理的过程可形象地描述为力可沿刚体上的与力的作用线重合的直线移动（或称为传递）。

由图 1-4 可知：刚体上 A 点的力是实际其它物体（刚体）对所分析研究（对象、目标）的实际作用的抽象（只有点接触力才可能实现）。而力的可传递性推论只表明，对刚体而言，作用在 A 点的作用力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线上任意一点的与 $\boldsymbol{F}$ 具有相同大小和相同指向（如图 1-4 中 B 点）的 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$ 对刚体的作用效应与作用在 A 点的 $\boldsymbol{F}$ 力作用效应等效。由力的可传递性推论所确定的与 $\boldsymbol{F}$ 作用等效的 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$ 亦不是真实地作用在刚体上的力。$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$ 只是虚拟的，但又与 $\boldsymbol{F}$ 的真实作用力学效应等效的力。正是这种虚拟地而又与真实作用力学效应的力（由力的可传递性确定的），才使得对作用在刚体上的力系的简化提供了可能。或者说对刚体的力学分析，并不是直接对真实地作用在刚体的力系进行分析研究。而是通过静力学公理及静力学公理所确定的结论、定理（由公理经过逻辑推理和数学演绎所得到），与作用在刚体上的真实作用力学效应等效的被称为简化的力系进行分析研究。

对于（点接触）力，若该力作用在刚体上，则力的三要素中的作用点这一要素，可放松为沿力的作用线所在直线上的任意一点。或者说力的三要素对刚体而言为：大小、方向、力的作用线。而被约束了作用线的即有大小、又有方向的矢量称为滑动矢量。因此上，对

物体而言（点接触）力可以看作是起点被固定（约束）的力矢量；而对刚体而言（点接触）力可以看作是作用线被固定（约束）的力矢量。作用在物体上的（点接触）力矢量可称为作用点固定（约束）矢量；作用在刚体上的（点接触）力矢量可称为作用线固定（约束）矢量——滑移（动）矢量。

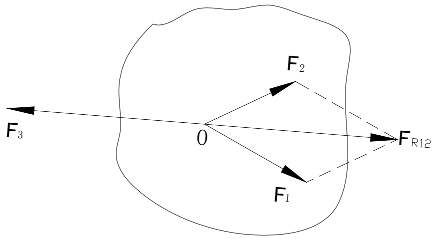
推论 2：三力平衡汇交定理

作用于同一刚体上三个（点接触）力，若刚体在这三个（点接触）力的作用下处于平衡状态，且其中两个（点接触）力的作用线（或作用线的延长线）交与一点。则这三个（点接触）力必在同一平面内，且第三个（点接触）力的作用线（或作用线的延长线）必通过前二（点接触）力的作用线（或作用线的延长线）的交点。

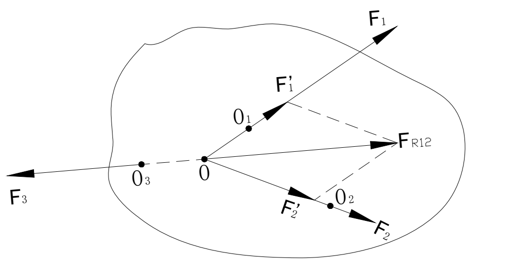
证明：

①三个（点接触）力的作用点为同一点（如图 1-5（a）所示）。

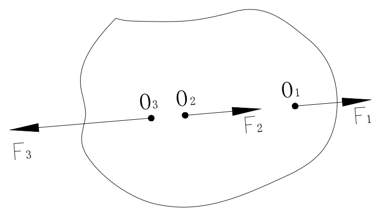
由平行四边形法则，得 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力为



(a)



(b)



(c)

图 1-5

$$\boldsymbol{F}_{R12} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

即作用在 O 点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 可由与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用线所在平面内的合力（作用点在 O 点）$\boldsymbol{F}_{R12}$ 等效代替。此时刚体上作用有与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 等效的 $\boldsymbol{F}_{R12}$（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 对刚体的作用以被 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 代替，因此 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 已不在作用在刚体上。即此时的刚体已不是真实的受 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 作用的刚体，而上虚拟的与真实的受 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 力学效应等效的刚体）和 $\boldsymbol{F}_3$。由条件，在 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 作用下，刚体处于平衡状态。当 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 由平行四边形法则用 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 等效时，刚体仍处于平衡状态。而此时刚体上作用且只作用两个（点接触）力，刚体同时处于平衡状态。由二力平衡公理可知 $\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_{R12}$ 大小相等方向相反，作用线在同一直线上。而 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用线交点在 O 点，O 点位与 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 的作用线上，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用线所在平面内的 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 作用线在同一直线上。因此 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用点必在 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 的作用线上（在这里所考虑的情况下，$\boldsymbol{F}_3$ 的作用点就是 O 点）。

同时，由以上证明过程可得，若将 $\boldsymbol{F}_2$ 的起点平行移动至 $\boldsymbol{F}_1$ 的终点；在将 $\boldsymbol{F}_3$ 的起点移至 $\boldsymbol{F}_2$ 的终点。由于 $\boldsymbol{F}_3$ 的长短与 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 的长短相同，显然，$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 依次首尾相接后构成一个封闭的三角形。容易验证 $\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_1$；$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$；$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_2$；$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_1$；$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$ 依次首尾相接同样构成一个封闭的三角形。

②三个（点接触）力作用线的延长线交与同一点（如图 1-5（b）所示）首先由力的可传递性定理，将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的起点由 O_1、O_2 沿 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用所在直线分别滑移到 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 作用线延长的交点 O。得两个滑移力矢量 $\boldsymbol{F}_1'$，$\boldsymbol{F}_2'$。由平行四边形法则确定滑移力矢量 $\boldsymbol{F}_1'$，$\boldsymbol{F}_2'$ 的合力矢量（应当特别注意的是 $\boldsymbol{F}_1'$，$\mathbf{F}_2'$ 矢量和不是力矢量 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力矢量。只有作用点在同一点的力矢量才有合力矢量，作用点不相同的力矢量，其合力矢量无意义，或者说不存在合力矢量的概念）。即

$$\boldsymbol{F}_{R12} = \boldsymbol{F}_1' + \boldsymbol{F}_2'$$

$\boldsymbol{F}_{R12}$ 称为 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$ 的合力矢量。同时 $\boldsymbol{F}_{R12}$ 也称为 $\mathbf{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$ 的主矢（量）。由力的可传递性定理和平行四边形法则所确定的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的作用线所在平面内的主矢（量）或者说 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$ 的合矢量 $\boldsymbol{F}_{R12}$（不是合力）的刚体力学效应与 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 对刚体的力学效应等效。因此 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 作用下的刚体与 $\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_{R12}$ 的作用下也同样处于平衡状态。由二力平衡公理，刚体在两个力作用且只在两个力作用下处于平衡状态。显然，$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_{R12}$ 大小相等，方向相反，作用线在同一直线上。$\boldsymbol{F}_3$ 的作用线必通过 O 点。即 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 的作用线的延长汇交与同一点（O 点）。

与①中完全类似可知，$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_1$；$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$；$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_2$；$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_1$；$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_3$ 依次首尾相接同样构成一个封闭的三角形。

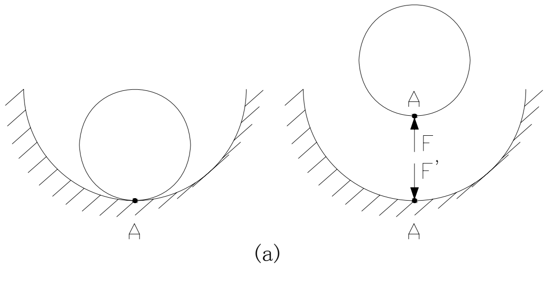
③该情况是②的特例。即作用在同一刚体上的三个（点接触）力，若刚体在这三个（点接触）力的作用下处于平衡状态，且其中两个（点接触）力的作用线在同一直线上。则这三个力的作用线在同一直线上，并满足三个力的代数和为零。

公理 4：作用与反作用定律

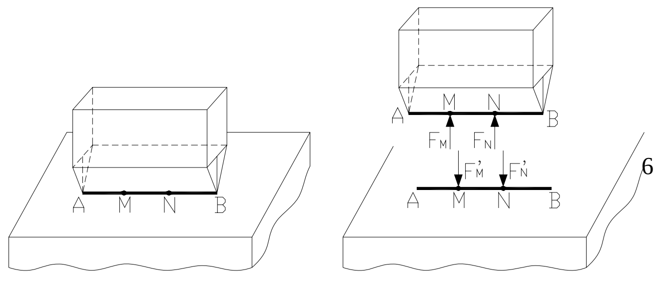
两物体相互作用各点处（接触力和超距力），其作用和反作用总是同时存在。各作用点的作用力大小相等，方向相反，作用线在同一直线上，作用力和反作用力分别相互作用的两个物体上。

以下分四种常见情况对作用与反作用，作用力与反作用力进行说明。

a）物体与物体间通过点接触形式的作用。如图 1-6（a）所示。



(a)



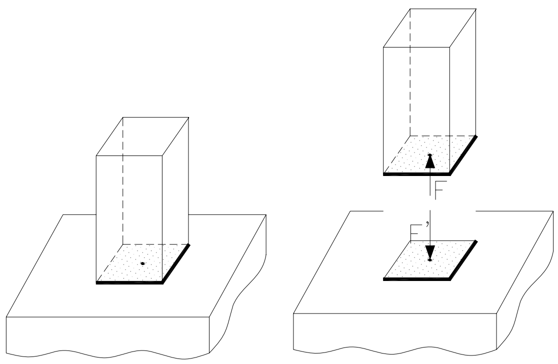
(b)

b）两物体通过 AB 线（图 1-6（b）中为直线，对曲线仍然成立）接触线相互作用。对 AB 接触（直）线上的任意点 M 或 N，其下部分对上边物体的作用被抽象为作用在上边物体在 AB 接触线上每一接触处的点接触力

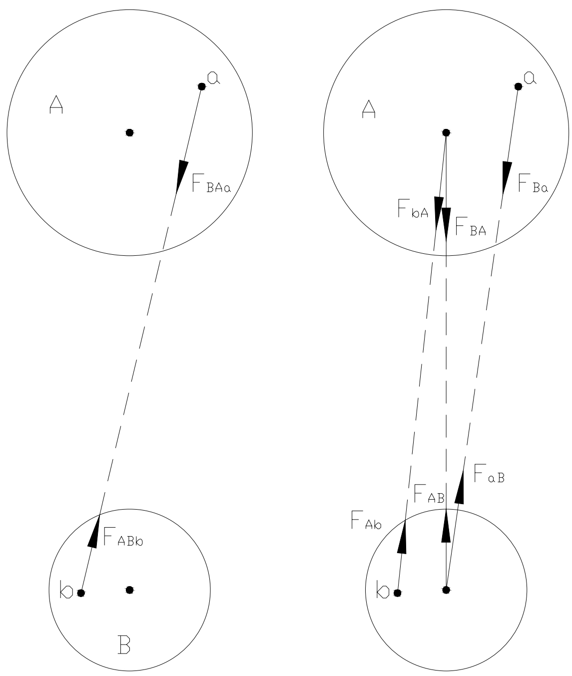
$$\boldsymbol{F}(x)；\ x \in [A, B]。$$

在 M、N 两点处分别为 $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{M}}$、$\boldsymbol{F}_N$；其上部分对下边物体的作用被抽象为作用在下边物体在 AB 接触线上的每一接触点处的点接触力 $\mathbf{F}'(x)$；$x \in [A, B]$。M、N 两点处分别为 $\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{M}}$、$\boldsymbol{F}'_N$。对线接触形式的物体与物体之间相互作用，是通过两物体间的接触线上的每一点接触相互作用实现的。在实质上作用与反作用还是对每一接触点而言的。

c）物体与物体间通过面接触形式的作用，如图 1-6（c）所示两物体通过共同的接触面（图中的阴影区域）接触而相互作用。对（阴影区域）接触面内任意点（图中给出了任意确定的一点），其下面部分对上边物体的作用被抽象为作用在上边物体在（阴影区域）接触面上有一接触点处的点接触力 $\boldsymbol{F}(x)$；x 为（阴影区域）接触面上的任意点。在图中给定点处的 $\boldsymbol{F}$。其上部分对下边物体的作用被抽象为在下边物体在（阴影区域）接触面上有一接触点处的点接触力 $\boldsymbol{F}'(x)$；x 为（阴影区域）接触面的任意点。在图中给定处的 $\boldsymbol{F}'$。同样，对物体与物体间通过面接触形式的相互作用，是通过两物体间的接触面上的每一接触点的相互作用实现的。在实质上作用与反作用还是对每一点而言的。



(c)



(d)

图 1-6

d）两物体间的非直接触（超距作用）形式的作用，如图 1-6（d）所示

这种情况，两个相互作用物体的作用体现在两物体上的每一点之间的相互作用。A 物体的任意一点 a，与 B 物体上的每一点之间都产生相互作用；B 物体上的任意一点 b，与 A 物体上的每一点之间也都产生相互作用。A 物体上的 a 点对 B 物体上的 b 点的作用，与 B 物体上的 b 点对 A 物体上的 a 点的作用为作用与反作用。A 物体上 a 点对 B 物体上 b 点的作用抽象为（点接触）力 $\boldsymbol{F}_{ABb}$；B 物体上 b 点对 A 物体上 a 点的作用抽象为（点接触）力 $\boldsymbol{F}_{BAa}$；由作用与反作用定律，$\boldsymbol{F}_{ABb}$、$\boldsymbol{F}_{Baa}$ 是 A 物体上 a 点和 B 物体上 b 点这两点间的作用力与以作用力。而在图中，$\boldsymbol{F}_{bA}$、$\boldsymbol{F}_{Ab}$；$\boldsymbol{F}_{aB}$、$\boldsymbol{F}_{Ba}$；$\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{BA}$ 都不在是对点之间的相互作用。$\boldsymbol{F}_{bA}$ 是 B 物体上 b 点对 A 物体上所有点作用的一种力学效应等效，可以理解为 B 物体上的 b 点对 A 物体的作用。$\boldsymbol{F}_{Ab}$ 是 A 物体上的每一点对 B 物体上 b 点的作用的一种力学效应等效，可以理解为 A 物体对 B 物体上 b 的作用。$\boldsymbol{F}_{bA}$、$\boldsymbol{F}_{Ab}$ 是 A 物体和 B 物体上 b 点之间相等作用的抽象表示；$\boldsymbol{F}_{aB}$、$\boldsymbol{F}_{Ba}$ 则分别为 A 物体上的 a 点与 B 物体之间的两物体通过 A 点接触而相互作用。其下部对上边物体的作用抽象成为作用在上边物体在接触点 A 处的点接触能力 $\boldsymbol{F}$；其上部分对下边物体的作用抽象成为作用在下边物体在接触点 A 点的点接触力 $\boldsymbol{F}'$。且由作用与反作用定律，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 大小相等，方向相反，作用线在同一条直线上，分别作用在两个物体作用的接触点 A 处。

b）物体与物体间通过线接触形式的作用，如图（c）所示

相互作用抽象表示和 B 物体与 A 物体上的 a 点之间相互作用的抽象表示；$\boldsymbol{F}_{AB}$、$\boldsymbol{F}_{BA}$ 则分别为 A 物体与 B 物体之间的相互作用抽象表示和 B 物体与 A 物体之间的相互作用抽象表示。

对万有引力和重力，其两个或两个以上物体间的相互作用的抽象表示已不是点与点之间的相互作用。这种情况下，物体间的作用是通过物体上的每一点的相互作用体现的，即这种作用是在物体上每一点上分布。通常情况下所说的万有引力和重力，其实质上是这种物体上每一点分布作用的抽象表示（体分布力）的力学效应等效表示（这种表示将在空间分布力系的简化中进行分析研究），即物体和物体间的万有引力和重力是作用在相互作用物体的重心上的抽象的力学效应等效的表示。此时的作用与反作用定律可表述为：两物体间的万有引力和重力是两物体间的非直接接触（超距）相互作用的抽象表示。其大小相等、方向相反，作用线在同一条直线上，分别作用在两个物体的重心处。这一结论应该是作用与反作用定律的一个推论。但由于其证明涉及到体分布力系的简化，此处证明略（可参考空间力系分布）。

必须强调的是作用在两物体上的作用力和反作用，虽然大小相等、方向相反，作用线在同一直线上，但由于作用力与反作用分别作用在两个物体上，因此对两物体中的任何一个物体，作用力与反作用不存在平衡问题。但若将相互作用的两物体为一个分析研究对象，这时作为同一分析研究对象的两物体间的作用力和反作用力，可以是一对相互平衡的力。特别是将物体限制为刚体时，同时又将两刚体一同作为分析研究对象，这种情况下两个刚体间的作用力和反作用力不但可以看作是一个平衡力系，而且可以应用加减平衡力系公理，在（将两刚体作为一个分析研究对象）分析研究力学效应时将其减去（即不考虑其对力学效应的影响）。

公理 5：刚化原理

若变形体在某一力系作用下平衡，则将此变形体刚化为刚体，这种将变形体视为刚体

的刚化不改变其原来的平衡状态。

变形体：由物质点在三维空间连续分布的，具有确定大小和形状的物质实体。且该物质实体受到其它物体作用时，其大小和形状或大小，或形状将发生变化。

变形体的刚化：变形体在其它物体作用的抽象力（系）由零增至最终值，且保持其最终值不变的条件下处于平衡状态。此时变形体由未受任何物体作用的初始（或自然）状到达了已发生变形的状态。所谓刚化就将在抽象力系、作用下已发生变形的处于平衡状态的变形体视为刚体。

如图 1-7 所示一可变形的弹簧。图 1-7（a）为未受力（系）作用时的初始（自然）状态（该状态下不能进行刚化）；图 1-7（b）为沿弹簧长度方向施加的力尚未达到最终值的中间状态。该状态构成弹簧的各物质点上存在有运动加速度不为零的物质点。即弹簧并未处于平衡状态，因此不能进行刚化；图 1-7（c）中弹簧长度方向施加的力已达到最终值。此时弹簧处于平衡状态。刚化原理中刚化是对图 1-7（c）中的弹簧进行的。

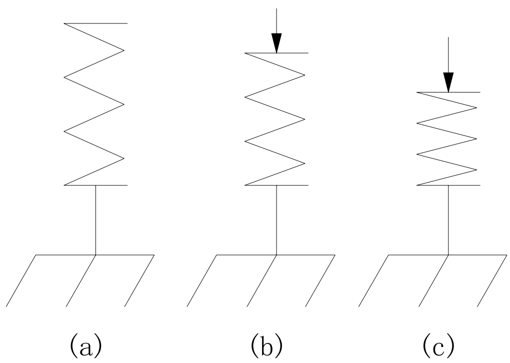


图 1-7

这一公理表明：对于变形体，将其刚化后，其平衡状态不会被坏；但对于刚体，若刚体处于平衡状态，将刚体视为变形体后，其平衡状态将无法继续保持。如受大小相等、方向相反（→ ←）作线在同一直线上的一对平衡力的刚体细杆（刚体杆）。若将刚体细杆视为变形绳索，显然其平衡状态不能继续保持。即刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件，但不是充分条件。

1-3　约束和约束反力

质点的位置：

在三维空间中任意取一固定点 O。质点在三维空间中占具一空间点（几何点）。这一空间点（几何点）与三维空间任意取的固定点 O 之间的相对表示称为质点的位置。

质点的位置矢量：

对三维空间中任意给定的固定点 O 和占具一空间点（几何点）的质点，以固定点 O 为起始点的到质点所占具的空间点（几何点）的有向线段称为以 O 点为基准的质点的位置矢量或称为质点的位置矢量。通常用黑体字（粗体字母）$\boldsymbol{r}$ 表示。

质点的位移：

对任意两个给定时刻 t_1、t_2。质点在两个时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}(t_1)$、$\boldsymbol{r}(t_2)$ 的差 $\boldsymbol{r}(t_2)-\boldsymbol{r}(t_1)$ 称为该质点在时刻 t_1 到时刻 t_2 的时间（间隔）的位置矢量或称为该质点的位移。

质点位移的坐标表示：在质点位置矢量的起始点处建立坐标系，为方便起见，不仿建立常用的标准正交坐标系$\{o;\ \boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_2,\ \boldsymbol{i}_3\}$或$\{o;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$。则质点的位置矢量可表示为：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

而质点的位置矢量可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{r}(t_2)-\mathbf{r}(t_1)\\ &= [x(t_2)-x(t_1)]\mathbf{i}+[y(t_2)-y(t_1)]\mathbf{j}+[z(t_2)-z(t_1)]\mathbf{k}\\ &= u\,\mathbf{i}+v\,\mathbf{j}+w\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

式中 u、v、w 分别称为质点在 t_1 到 t_2 时间（间隔）内沿 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$（或沿坐标 x、y、z）的位移。u、v、w 也称为质点位移的坐标表示。

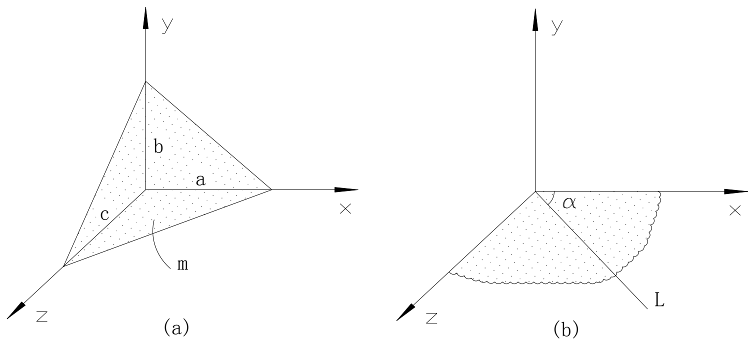
质点在三维空间的位置改变通常情况下会因为其它物体对质点的作用，其位移受到限制。若质点的位移未受任何其它物体作用的限制，则该质点称为自由质点。若质点的位移受到其它物体作用的限制，则该质点称为非自由质点。

对于非自由质点，其它物体对非自由质点的位移限制的几何（表示）条件，称为约束条件。对非自由质点进行限制的物体称为约束条件，或称为约束。约束（体）对非自由质点的限制作用的抽象表示称为约束反力。

质点的自由度：

能够完全描述质点在空间运动的最少独立位移的坐标表示的个数。

对于自由质点，在平面情况，需要最少两个独立的位移的坐标表示 u、v。因此自由质点的平面运动自由度为 2；对空间情况，需要最少三个独立的位移的坐标表示 u、v、w，因此自由质点的空间运动自由度为 3。



对于非自由质点，其自由度数为与之对应的自由度数减去约束条件的个数。如图 1-8（a）所示，若质点的运动被限制在 m 平面内，则平面 m 的约束条件为：任何时刻质点的位置矢量：

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$$

图 1-8

的位置坐标 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 必须满足几何条件

$$\frac{x(t)}{a}+\frac{y(t)}{b}+\frac{x(t)}{c}=1$$

因此被限制在 m 平面内运动。图 1-8（b）作为课堂讨论。的非自由质点的自由度为 2。

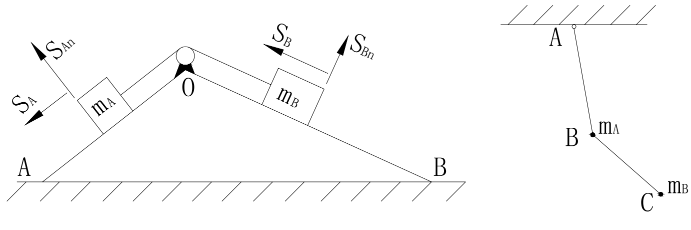
质点系的自由度：

能够完全描述质点系在空间运动的最少独立位移坐标表示的个数。

若质点系中的 N 个质点均为自由质点。对于面平情况，需要最少 $2N$ 个独立的位移坐标

标 u_1、v_1；…；u_N、v_N 表示。因此 N 个均为自由质点的质点系的自由度为 $2N$；对空间情况，需要最少 $3N$ 个独立的位移的坐标 u_1、v_1、w_1；…；u_N、v_N、w_N 表示。因此 N 个均为自由质点的质点系的自由度为 $3N$。

对质点系中存在非自由质点的情况，其自由度数为与之对应的自由质点构成的质点系的自由度数或减去对所有非自由质点的约束条件之和的个数。如图 1-9（a）所示铅垂平面内的两固定直线 OA、OB（两斜面与铅垂面的交线）。OA 线上有一滑块 m_A，OB 线上有一滑块 m_B。在分析研究 m_A 在 OA 线上和 m_B 在 OB 线上的位移（或运动）时，当 m_A、m_B 的几何尺寸很小（相对 OA、OB 线的长度）时。m_A、m_B 均可视为质点。此时 m_A、m_B 构成分析研究 m_A、m_B 的位移（或运动）的（二个质点）质点系。m_A、m_B 均作为自由质点时各有两个自由度（平面情况）。因此 m_A、m_B 构成的自由质点系的自由度为 4。对 m_A，直线 OA 限制了 m_A 在 OA 线法线方向的位移；又 m_B，直线 OB 限制了 m_B 在 OB 线法线方向的位移。同时 m_A、m_B 之间的不可伸缩连结绳也限制了 m_A、m_B 的相对位移。其全部的约束条件为



(a)　　(b)

图 1-9

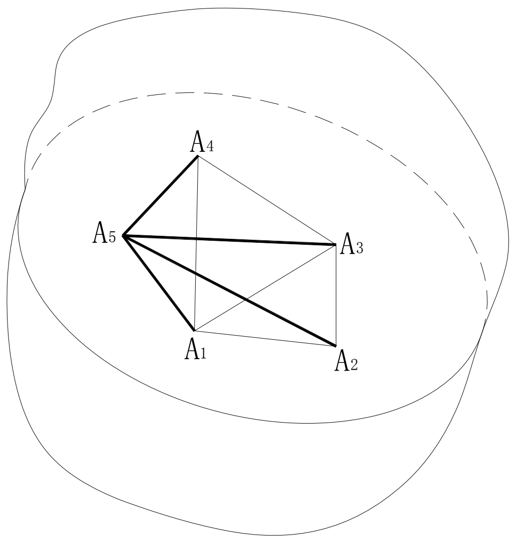
$$S_{Bn}=0\ ;\ S_{An}=0\ ;\ S_A=S_B$$

因此被约束在铅垂面内在 OA、OB 线上的 m_A、m_B（二质点）质点系的自由度为 4−3=1。

刚体（单一）的自由度：

作为无限连续分布的特殊质点系，（单一）刚体在无外部限制时（自由刚体）的自由度对平面情况为 3；对空间情况为 6。

如图 1-10 所示，任意取刚体中一点 A_1。A_1 点作为一个单一质点，在空间情况下有三个自由度。当 A_1 点取定后，在取异于 A_1 的刚体中一点 A_2。A_2 作为一个单一质点，在空间情况下也有三个自由度。但 A_1、A_2 作为同一刚体上的二个质点的质点系，由刚体的定义可知，该质点系存在一个约束条件 $d_{A_1A_2}=$常。因此作为同一刚体上的 A_1、A_2 点所构成的二质点系的自由度为 6 – 1 = 5。当选定 A_1、A_2 点后，在刚体上任选异于 A_1、A_2 的点 A_3。显然，将 A_1、A_2、A_3 作为自由质点，A_1、A_2、A_3 构成的质点系的自由度为 3×3 = 9。由于 A_1、A_2、A_3 都是同一刚体上的点构成的非自由



质点系。由刚体的定义可知，该质点系存三个约束条件 $d_{A_1A_2}=$常；$d_{A_2A_3}=$常；$d_{A_2A_3}=$常；$d_{A_3A_1}=$常。因此作为同一刚体上的三个质点的质点系的自由度为 9−3 = 6。继续这一构成法，在刚体中选取 A_4 点，显然对 $A_1,\cdots,A_4$ 的四质点的质点系，刚的约束条件 $d_{A_1A_2}=$ 常，…，$d_{A_1A_3}=$ 常。六个约束条件，而增加

图 1-10

的 A_4 点作为自由质点，当 A_4 添加到 A_1、A_2、A_3 的质点系中时，四质点系的自由质点的自由度为 4×3 = 12。作为刚体上的四质点系的自由度为 12 － 6 = 6。当同一刚体上选取的质点系的质点个数大于三时，每增加一个质点，质点系的自由度增加三个。同时增加的质点同原有质点系中的质点间由于刚体定义的约束，其至少增加三个约束条件，且只要给定任意三个约束条件，被添加质点同质点系中其它质点点的位置将完全确定。即新增加点到质点系中并不改变质点系的自由度。由此得出结论：当在刚体上取 $n\geqslant 3$ 个质点构成质点系时，该质点系的自由度为 6。当这样的质点系包含刚体上所有连续分布的质点时，可得刚体自由度为 6。

《注：由刚体定义所限制的作为连续分布质点系的刚体内任意二点间距离保持变的约束称为（刚体）内部约束。而作为单一刚体，正是由于其内部约束使得单一刚体具有 6 个自由度。当单一刚体受到其它物体（或刚体）限制时，这种限制称为外部（相对所分析研究的刚体而言）约束。在理论力学的分析研究中，对刚体的约束指的都是外部约束。外部约束限制的是单一自由刚体的 6 个自由度。》

作为空间情况的特例容易确定，平面情况下单一自由刚体的自由度为 3。

例：平面情况下刚体自由度的几何意义。

如图 1-11 所示。刚体在 t_0 时刻占具 A_0、B_0、C_0 位置。在 t 时刻刚体经过（刚体位移）位移占具 A、B、C 位置。在几何上可把这个刚体位移看作是：刚体沿 x 方向位移，使得 A_0 与 A 具相同 x 坐标；刚体沿 y 方向位移，使得 A_0 与 A 具有相同 y 坐标（此时的 A_0 是图中的 A_1）；刚体绕 A_0 点（图中为逆时针）转动，使得 C_0、B_0 与 C、B 重合（此时 A_0 是图中 A、C_0 为图中 C_2、B_0 为图中 B_2）。最后把刚体的位移用随刚体上某一质点的位移和绕该质点的转动完全描述。即刚体的位移可用 u_A、v_A、θ 完全描述（表示）。如图 1-12 所示。

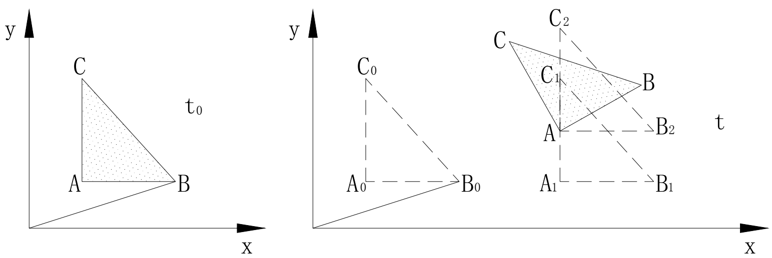


图 1-11

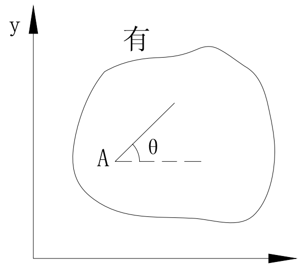


图 1-12

例：空间情况下刚体自由度的几何意义。　　　　　　　　　　图 1-13

如图所示。将 A 点在 x、y、z 方向分别平行位移 u、v、w 使得 A 与 $\overline{A}$ 重合；将 $\overline{A}C_1$ 直线段绕 $\overline{A}D_1$ 转动，使得 $\overline{A}C_1$ 位于 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 面内。此时应注意，一般情况下 $\overline{A}C_1$ 虽然在 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 面内，但 $\overline{A}C_1$ 与 $\overline{A}\overline{C}$ 不重合。$\overline{A}D_1C_1$ 一般情况下与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 也不在同一平面内；将 $\overline{A}C_1D_1$ 绕 $\overline{A}C_1$ 转动，使得 $\overline{A}D_1C_1$ 与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 在同一平面内。此时应注意，一般情况下，$\overline{A}C_1D_1$ 虽然与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 在同一平面内，但 $\overline{A}C_1D_1$ 与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 不重合；将 $\overline{A}C_1D_1$ 绕 $\overline{A}B_1$ 转动，使得 $\overline{A}C_1$ 与 $\overline{A}\overline{C}$ 重合（$\overline{A}C_1D_1$ 同时与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}$ 重合，$\overline{A}C_1D_1B_1$ 与 $\overline{A}\overline{D}\overline{C}\overline{B}$ 重合）。最后得空间刚体的位移可用随刚体上某一质点的位移和绕三个非共线轴的转动完全描述。即空间刚体的位移可用 u_A、v_A、w_A、α、β、γ 完全描述（表示）。

《以上所涉及到的仅仅是对位移的限制，或称为位移约束。约束的形式除位移约束，还有其它形式的，这一点将在虚位移原理中作进一步的分析研究。》

在本节开始给出了约束反力的定义：约束（体）对非自由质点的限制作用的抽象表示称为约束反力。约束反力的特征是它的大小无法确定（其方向或方位可由位移限制的特点确定），因此约束反力是未知力。它的大小与被约束物体的运动状态和作用形式有关，应当通过力学规律的分析计算确定。静力学的主要内容之一就是通过平衡条件求解静力学问题的约束反力。

主动力：

被分析研究的对象上的其它物体的已知大小、方向、作用点的，并能主动引起物体（刚体）运动或使物体（刚体）有运动趋势的作用力。

被动力：

随主动力的消失而为零的其它物体对被分析研究对象的作用力。约束反力是一种被动力。

常见的理想化约束：

1．柔索（绳索）约束

若细长的柔（绳）索对被约束（分析研究的刚体或物体）的限制仅为沿柔（绳）索伸长方向的位移，则细长柔（绳）索对被约束对象的约束称为柔（绳）索约束。柔（绳）索约束对被约束对象的作用的约束反力的作用线在细长柔（绳）索的直线上，与被动约束对细长柔（绳）索的作用力互为作用力和反作用力。

例：柔（绳）索约束反力的表示。如图 1-14。

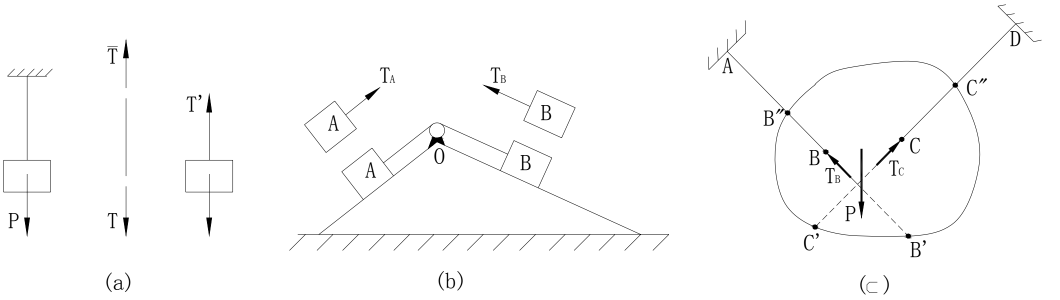


图 1-14

（a）对柔（绳）索，由于其对被约束对象的限制沿柔（绳）索伸长方向的位移。因此柔（绳）索受到的被约束对象的作用力总是使得柔（绳）索产生绅长或有产生伸长的趋势。这种对细长柔（绳）索的作用力称为拉力。因此对细长柔（绳）索约束，被约束对象对其的作用力恒为拉力（如图 1-14（a）所示）。而细长柔（绳）索对被约束质点的约束反力在被约束物体的约束点处，且与被约束质点对细长柔（绳）索的作用力互为作用力与反作用力。（如图 1-14（a）所示）由公理 4（作用与反作用原理）可知

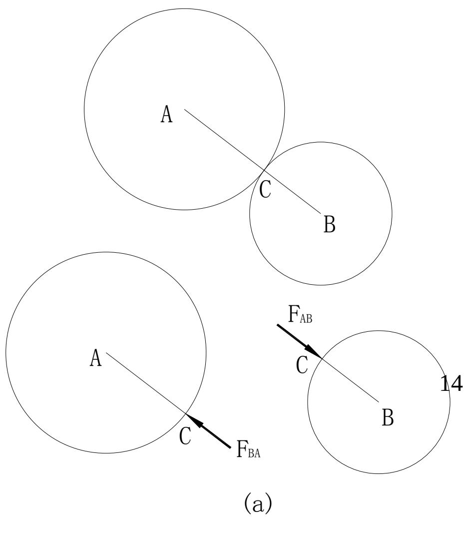
$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}'$$

（b）质点（滑块）*A*、*B* 受细长柔（绳）索约束反力如图 1-14（b）所示。其约束（在 *A*、*B* 所构成的质点系中为内部约束）细柔（绳）索的受力在光滑接触面约束中进行分析。

图 1-14（c）如图所示刚体，该刚体通过两细长柔（绳）索约束处于平衡状态。由细长柔（绳）索 *AB*、*DC* 约束的物体为刚体，细长柔（绳）索一般为变形体。但细长柔（绳）索 *AB*、*DC* 与其被约束的刚体作为一个被分析研究的对象时，只要其处于平衡状态。则由公理 5（刚化原理），可将作为变形体的细长柔（绳）索 *AB*、*DC* 进行刚化。即将细长柔（绳）索 *AB*、*DC* 与其被约束的刚体视为一个刚体。因为在平衡状态时 *AB* 细长柔（绳）索、*DC* 细长柔（绳）索与被约束刚体上的所有点之间的距离保持不变。《但必须注意，若未处于平衡状态，如图 1-14（b）中，将 *CD* 约束除去。这时刚体和细长柔（绳）索都将运动，此时即使将细长柔（绳）索刚化，细长柔（绳）索上的点与刚体上的点之间的距离不在保持不变。即在非平衡状态下，带有细长柔（绳）索约束的刚体，在对细长柔（绳）索应用公理 5（作用与反作用原理）进行刚化后，细长柔（绳）索不能与其所约束的刚体视为同一刚体。》此时作为细长柔（绳）索对刚体的约束反力（作用在刚体 *B* 点的）T_B、（作用在刚体 *C* 点的）T_C 由于可传递性，将可分别沿 *AB* 线和 *DC* 线滑移。或者说 T_B、T_C 可以作用在 *AB* 线和 *DC* 线上任意一点。通常情况下，对处于平衡状态的问题，细长柔（绳）索的约束反力总是画在被约束刚体外边缘与细长柔（绳）索的交点处，使得约束反力的指向背离被约束刚体。如图中所示 *AB*、*DC* 分别与被约束刚体的外边缘交与 B'、B'' 和 C'、C''，但 T_B 与 T_C 通常画 B'' 和 C''。

2．光滑接触面约束

当两刚体通过相互作用接触（面、线）点进行限制时，这种限制对接触（面、线）点处法线



(a)

方向的位移和切线方向的位移进行了约束。若沿切向方向两刚体的相对位移未受任何限制（通过切线方向的限制是刚体间的摩擦作用），即认为刚体接触（面、线）点之间的摩擦略去不计，或称光滑（面、线）点接触。这种情况下的两刚体间的相互约束称为光滑接触面约束。

例：试画出图 1-14 所示各物体的约束反力，并写出其相应的约束条件（所有接触均为光滑面接触）。

（a）图 1-14（a）所示，两圆盘在接触点（实际上是接触线）*C* 处光滑（无摩擦）相互作用。若 *A*、*B* 两圆盘均为刚体。则 *A* 圆盘对 *B* 圆盘上 *C* 点的限制为（约束条件）：

$$\delta_{BC} = \delta_{AC}$$

B 圆盘对 *A* 圆盘上 *C* 点的限制（约束条件）为：

$$\delta_{AC} = \delta_{BC}$$

（式中 δ 为沿 *A*、*B* 圆盘圆心连线上的位移）。

A 圆盘对 *B* 圆盘作用的约束反力为 $\boldsymbol{F}_{AB}$；*B* 圆盘对 *A* 圆盘作用的约束反力为 $\boldsymbol{F}_{BA}$。由公理 4（作用与反作用定律），$\boldsymbol{F}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{F}_{BA}$ 为 *A*、*B* 两圆盘在接触点处的一对作用和反作用力，且 $\boldsymbol{F}_{AB} = \boldsymbol{F}_{BA}$。

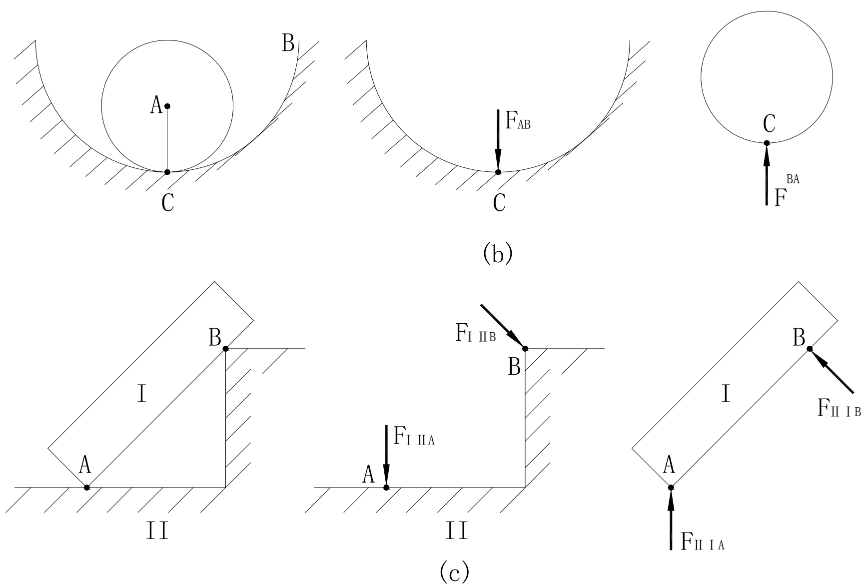


图 1-14

（b）图 1-14（b）所示，圆柱 *A* 与相对惯性参考系（体）静止的圆柱凹面 *B* 在接触点（实际上是接触线）*C* 处光滑相互作用。若 *A*、*B* 均为刚体，则由于 *B* 相对于惯性参考系是静止的。因此 *B* 对 *A* 的约束条件为：

$$\delta_C = 0$$

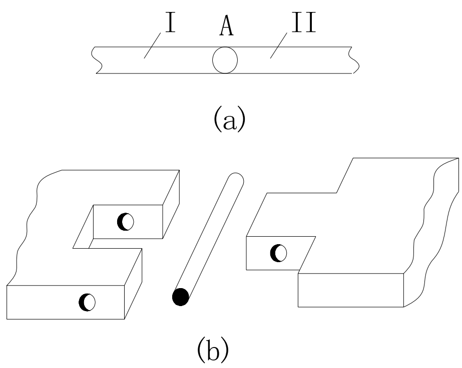
约束反力如图图 1-14（b）所示。

（c）图 1-14（c）课堂讨论

对光滑接触面约束（无摩擦接触约束），其约束反力作用在两刚体的接触点，约束对被分析研究的对象（刚体）的约束反力作用在被分析研究的对象上的接触点处，约束反力的作用线在两刚体接触点处两刚体边缘公共法线上，其方向总是指向被分析研究的对象。

3．光滑圆柱形铰链约束（中间铰约束）图 1-15 所示。

两物体（刚体）在连接点处通过圆柱形物体（刚体）的光滑接触面约束连接的两物体（刚体）间约束。



(a)

(b)

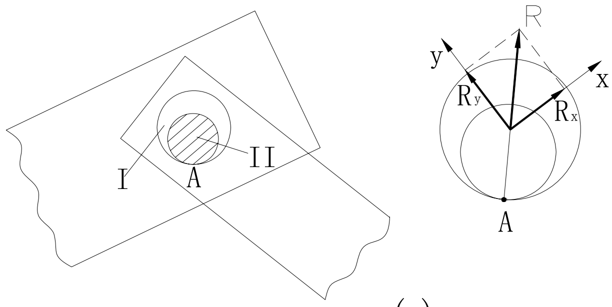
图 1-15

通常情况下，被中间铰连接约束的两物体（刚体）的位移（或运动）都是在与圆柱连接刚体轴线对称正交的平面内。因此，中间铰连接约束限制被连接的物体（刚体）在中间铰连接点处具有相同的位移（被中间铰连接的物体点处无相对水平和竖直方向位移），但中间铰连接约束的物体（刚体）允许有绕过中间铰连接点与被连接物体（刚体）运动平面垂直的轴的相对转动。中间铰连接约束的表示如图 1-15（a）所示。*A* 点处的中间铰连接约束的构造放大示意如图 1-16 所示。

连接两刚体的中间铰连接约束的约束条件为：

$$u_{IA}=u_{IIA}；\qquad v_{IA}=v_{IIA}$$

由中间铰连接约束的限制可知，圆柱形刚体连接分别与刚体 I、II 光滑接触作用。如图 1-16（a）所示。因此圆柱形刚体连接与刚体 I 和刚体 II 的相互作用的约束反力都被认为是作用在运动平面内（即在圆柱形刚体连接的轴线对称垂直平面内）的点上，图中 *A* 点。尽管 *A* 点一定在 I、II 刚体的连接处内圆边界和圆柱形刚体的外圆边界上，但随 I、II 刚体所受其它作用（主动力和约束反力的不同），*A* 点的位置并不是固定不变的。显然随 *A* 点的位置不同，I、II 和圆柱形刚体相互之间的约束反力 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方位（包括方向）是不同的（尽管 $\boldsymbol{R}$ 作为光滑接触面约束，其作用线沿接触点处公共法线方向，且指向被约束的分析研究对象。但由于约束的接触点无法事先确定，因此 $\boldsymbol{R}$ 无法确定）。但对圆柱形刚体而言，$\boldsymbol{R}$ 作用线必通过其圆柱形轴线（或者说通过与圆柱轴线正交的面所截的圆柱上圆的圆心），对于刚体的圆柱而言。应用力的可传递性，$\boldsymbol{R}$ 可沿其作用线滑移到圆柱形刚体所连接的刚体 I、II 的连接圆孔的圆心处。并且由力的平行四边形法则，将作用在圆柱形刚体上的 $\boldsymbol{R}$ 用正交的 $\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$ 等效表示（正交条件还可放宽为任意两个非共线的 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$ 等效表示）。由此可得，对于中间铰连接约束，刚体 I、II 对圆柱形刚体的约束反力可用作用在与 I、II 刚体开孔圆心重合的圆柱形刚体的点上的一对相互正交的等效力表示。如图图 1-16（b）所示。同理，圆柱形刚体对刚体 I 或刚体 II 的约束反力可用作用在 I 刚体或 II 刚体开孔圆心处的一对相互正交的等效力表示。



(a)

图 1-16

4．固定铰支座约束

当中间铰所连接的物体（刚体）I、II中有一个相对惯性参考系（体）静止，则相对惯性参系（体）静止的物体（刚体）连同柱形刚体对另一物体（刚体）的限制称固定铰支座约束。

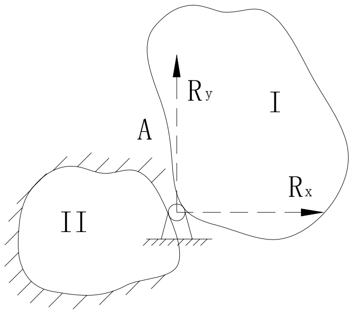


图 1-17

固定铰支座约束限制了被约束物体（刚体）在连接处的点上任意两个不同方向的位移为零，即

$$u_{IA}=0; \qquad v_{IA}=0$$

而固定铰支座对被约束物体（刚体）在约束点的约束反力与中间铰连接约束反力一样，相对惯性参考系（体）静的物体（刚体）连同圆柱形刚体对物体（刚体）I 在连接约束点处的约束反力可用作用在物体（刚体）I 开孔圆心处的一对相互正交的等效力表示。如图 1-17 给出了固定铰支座约束的示意图及固定铰支座约束的常用表示形式及固定铰支座对物体（刚体）I 的约束反力。

5．可动铰支座约束

两物体（刚体）在连接点处通过圆柱形刚体的光滑接触面约束连接两物体（刚体）的约束。与中间铰约束和固定铰支座约束不同的是，圆柱形刚体不是通过被连接物体（刚体）上开的圆孔实现的。而是被连接物体（刚体）通过了圆柱形刚体的外边缘直接光滑接触面接触。

通常情况下可动铰与座所连接的两个物体（刚体）中有一个物体（刚体）相对惯性参考系（体）静止。如图 1-17 所示。图 1-17（a）给出了可动铰支座中物体（刚体）II与圆柱形刚体对物体（刚体）I 的限制示意图。由图中可以看，可动铰支座限制了被约束物体（刚体）I 沿约束物体（刚体）II在连接接触点处法线方向的位移为零。同时允许被约束物体（刚体）I 在连接接触点切线方向有微小移动。也正是允许的这种微小移动，使得可动铰支座对被约束物体（刚体）I 沿约束物体（刚体）II在连接接触点处切线方向的约束反力为零。可动铰支座的约束条件为

$$\delta_N=0$$

图 1-17（b）、图 1-17（c）、图 1-17（d）给出了几种常见的可动铰支座约束的表示及其约束反力。

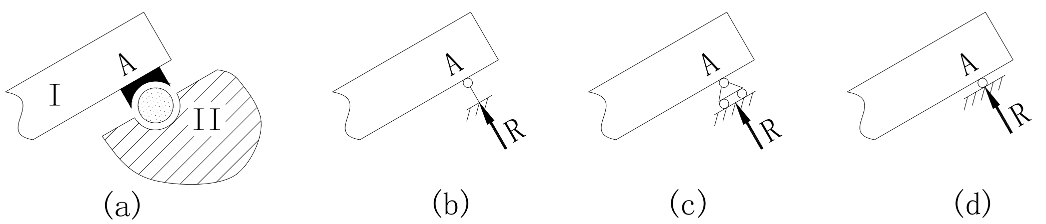


图 1-17

6．链杆约束

二力构件（二力杆）：

单一刚体，若刚体只在两点上受到力的作用（主动力或被动力），且刚体处于平衡状态。

这样的刚体称为二力构件或二力杆。

在确定一刚体是否是二力构件（二力杆）时应注意：

①刚体必须处于平衡状态。当刚体在两点上受力作用，此时刚体并不一定处于平衡状态。因此不能认为刚体上作用二个力时，该刚体就是二力构件（二力杆）。

②刚体上只有二点处受到力。也就是说二力构件（二力杆）上并不是只能作用两个力。二力构件（二力杆）上可作用三个或更多的力，只要所有这些作用力都作用在刚体上的两个点上。

③二力构件（二力杆）上作用的力可以是主动力也可以是被动力（约束反力）。

④任何刚体只有在不计其重力（重量）影响时才能是二力构件（二力杆）。或者说受重力作用的刚体不可能是二力构件（二力杆）。

二力构件（二力杆）的受力特点：

作用在二力构件（二力杆）上两点处的合力（作用点相同的力可由平行四边形法则确定其合力）等值、共线、反向。

通过二力构件（二力杆）两端的中间（固定）铰约束将两物体（刚体）连接的约束称为链杆约束。由二力构件（二力杆）的受力可知，由链杆约束所施加的约束反力作用线在连接二力构件（二力杆）二端中间铰的连线上。常见的链杆约束所连接的两个物体（刚体）中一个是相对惯性参考系（体）静止的。

7．球形铰链支座约束

与柱形铰链支座连接约束不同的是，连接不同物体的圆柱形刚体换成圆球形刚体。其约束条件是限制了 *A* 点任意三个非共面方向的位移为零。如图 1-18 所示。但允许刚体 I 绕过 *A* 点的任意轴转动。由Ⅱ及圆球形刚体施加给 I 的约束反力可用作用在 I 上 *A* 点处的三个两两正交的作用力表示（实质上可用任意三个非共面的作用力表示）。

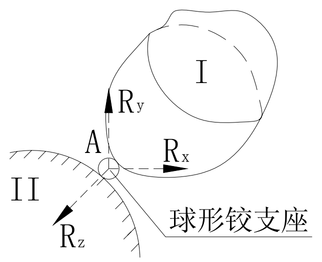


图 1-18

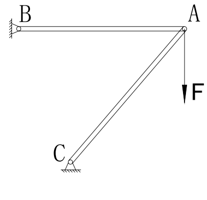
1-4　受力分析和受力图

对于给定的质点系或刚体系，在对其进行理论力学范围的分析研究时（包括静力学、动力学），总是通过已知分析研究的对象的条件确定所需要求知量。而确定所分析研究的对象，并将除所选定分析对象外的其它物体对所选定的对象的作用分析过程称为受力分析。而将除所选定的对象外的所有其它物体对所选定对象的作用都以抽象作用力的形式画在所选定的对象上的任意图称为被选定对象的受力图。

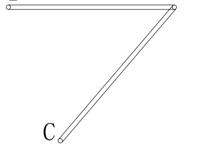
下面通过举例说明受力分析的过程及受力图的画法。

例：试画出图 1-18 所示简单托架 *ABC* 的受力图；*AB* 杆的受力图；*AC* 杆的受力图；*A* 处圆柱形刚体（销钉）的受力图（不计各杆的重量，不计销订重量）。

解：



(a)



(b)

（a）*ABC* 的受力图

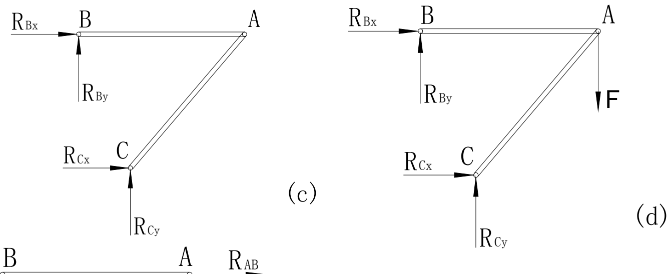
选定研究象（包 *AB* 杆、*AC* 杆和销钉）。如图 1-18（b）所示。

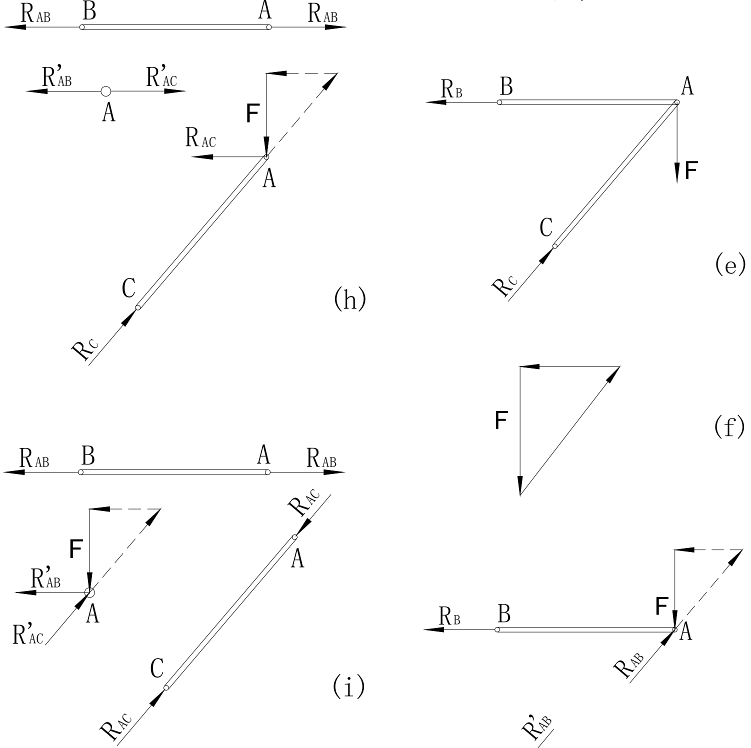
确定除选定研究对象外所有其它物体对所选定研究对象的作用（包括相对惯性系静的所选定研究对象连接点 *B*、*C* 两处的两个固定铰支座约束；另一物体对所选定研究对象在 *A* 点的（点接触）作用的抽象力 ***F*** 表示）。

将所有对选定研究对象的约束去掉，而用各约束对应的约束反力代替。并将约束反力画在取出的研究对象图的对应约束点处。如图 1-18（c）所示。

将所有对选定研究对象的已知大小、方向、作用点（或已知作用点和方位但大小求知）的作用以抽象形式给出的作用力（通常情况下是主动力或称为载荷）画图上，如图 1-18（d）所示。

若所选定的研究对象处于平衡状态（在整个静力学分析中，选定的研究对象总是处在平衡状态），则可利用二力构件（二力杆）、三力平衡汇交定理、平行四边形法则、作用力和反作用力定律等结论对所选定的研究对象受力图进行进一步的分析。本例中 *AB*、*BC* 杆为刚体（刚性杆），均为二力构件（二力杆）。作用在 *B*、*C* 两点的约束的力分别沿 *AB* 两点、*AC* 两点的连线。如图 1-18（e）所示。进一步还可通过三力平衡汇交定理确定 $\boldsymbol{R}_B$、$\boldsymbol{R}_C$ 的方向及用 ***F*** 表示的大小。如图 1-18（f）所示。





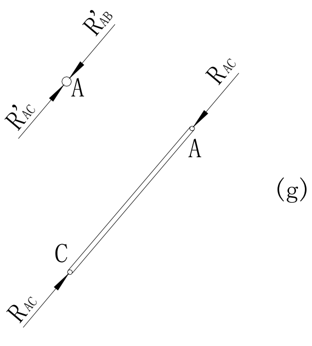


图 1-18

《本例中 ABC 研究对象在主动力（载荷）***F*** 作用下和 *B*、*C* 处的固定铰支座约束下相对惯性参考系（这里的惯性参考系取为地球）静止。即处于平衡状态。若将研究对象看是由 *AB*、*AC* 刚性杆和圆柱形刚性销钉组成的刚体系，圆柱形刚体销钉相对 *AB*、*AC* 刚性杆的尺寸而言可看作质点。显然两刚性杆 *AB*、*AC* 共具有六个自由度（平面情况），作为质点的销钉具有两个自由度。因此该作为刚体系的研究对象共有八个自由度。而约束条件为：

$$u_{BX}=0；\ u_{BY}=0；\ u_{CX}=0；\ u_{CY}=0；$$

$$(u_{BX})_{AB}=(u_{AX})_A；\ (u_{AY})_{AB}=(u_{AY})_A；$$

$$(u_{AX})_{AC}=(u_{AX})_A；\ (u_{AY})_{AC}=(u_{AY})_A$$

由此可知研究对象作为非自由刚体系，其自由度为 0。即处于平衡状态》

（b）*AB* 杆受力图；*AC* 杆受力图；销钉受力图

① $\boldsymbol{F}$ 作用在 *AB* 杆上

如图 1-18（g）所示。*AC* 为二力构件（二力杆）；*A* 销钉可视为质点；*AB* 为二力构件（二力杆）。由于 *AB* 二力杆，利用三力平衡汇交定理，可确定已由二力杆 *AC* 和质点销钉 *A* 确定了 $\boldsymbol{R}_{AB}$ 的方向及用 $\boldsymbol{F}$ 表示的 $\boldsymbol{R}_{AB}$ 的大小和 $\boldsymbol{R}_B$ 的方向、大小。由作用力与反作用力定律：

$$\boldsymbol{R}_{AB}=-\boldsymbol{R}'_{AB}；\qquad（\boldsymbol{R}'_{AB}=-\boldsymbol{R}'_{AC}=\boldsymbol{R}_{AB}；\text{二力平衡公理}）$$

$$\boldsymbol{R}_{AC}=-\boldsymbol{R}'_{AC}\qquad（\boldsymbol{R}_{AC}=-\boldsymbol{R}_{AB}）$$

进一步分析销钉（质点）与 *AB*、*AC* 刚性杆的相互位移关系。若将销钉 *A*（作为质点）与 *AB* 刚性杆的 *A* 点重合，作为质点的销钉与 *AB* 刚性杆上任意点的相对距离将会保持不变，即可将作为质点的销钉与 *AB* 刚性杆视为同一刚体。所不同是作为质点的销钉与 *AB* 刚性杆重合后作为同一刚体，在 *A* 点处的作用力发生变化了。即 *A* 点处作用 *AB* 杆单独作为刚体的作用力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{R}_{AB}$ 和作为质点的销钉上作用的力 $\boldsymbol{R}'_{AB}$、$\boldsymbol{R}'_{AC}$。其中 $\boldsymbol{R}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{R}'_{AB}$ 是作用力和反作用力（作用力和反作用力必须作用在两个物体上），一但将作为质点的销钉和 AB 刚性杆重合后作为一个刚体时，$\boldsymbol{R}_{AB}$ 和 $\boldsymbol{R}'_{AB}$ 不在是作用力和反作用力。而是等值、反向、共线的一对平衡力。由加减平衡力系公理，在销钉和 *AB* 刚性杆重合后视为同一刚体的刚体上减 $\boldsymbol{R}_{AB}$、$\boldsymbol{R}'_{AB}$ 构成的平衡力系，并不影响刚体的力学效应。此时 *AB* 刚性杆 *A* 点上作用有 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{R}'_{AC}$。$\boldsymbol{F}$ 为主动力，$\boldsymbol{R}'_{AC}$ 为 *AC* 刚性杆对作为质点的销钉与 *AB* 刚性杆视为一个刚体时的约束反力，$\boldsymbol{R}'_{AC}$ 与 $\boldsymbol{R}_{AC}$ 为作用力和反作用力。同样，若将作为质点的销钉与 *AC* 刚性杆在 *A* 点重合并视为一个刚体。则 *AC* 刚性杆 *A* 点作用有 $\boldsymbol{R}'_{AB}$。$\boldsymbol{R}'_{AB}$ 为 *AB* 刚性杆对作为质点的销钉与 *AC* 刚性杆视为一个刚体时约束反力，$\boldsymbol{R}'_{AB}$ 与 $\boldsymbol{R}_{AB}$ 为作用力和反作用力。由此可得结论：

作为中间铰连接约束的圆柱销钉，若将其理想化为一个质点，则在对由其连接约束的物体（刚体）进行受力分析时，可将其与所连接的任一物体（刚体）一同视为一个物体（刚

体）。这里应当注意的是只有将圆柱销钉理想化为一个质点时，结论才成立。若销钉不是作为质点，则要考虑销钉本身的转动，此时销钉相对被其连接约束的物体不能视为一个刚体，因为当销钉转动（相对被连接约束的物体）时，销钉上的点与被连接约束的物体（刚体）上点的距离将发生变化。

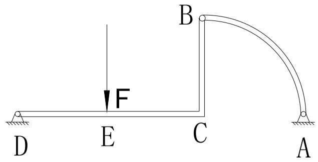
② ***F*** 作用在 *AC* 杆上

如图 1-18（h）所示。容易证明图-18（g）、图-18（h）两图上 *A* 点的三角形是全等三角形。即图-18（g）、图-18（h）两图中所确定的 *AB* 杆 *A* 点、*B* 点；*AC* 杆 *A* 点、*C* 点；作为质点的销钉 *A* 点上的合力是相同的。同样对图-18（h）中的作为质点的销钉也可应用①情况时的结论，即将作为质点的销钉与 AC 刚性杆或 AB 刚性杆视为一个刚体。

③ ***F*** 作用在销钉上

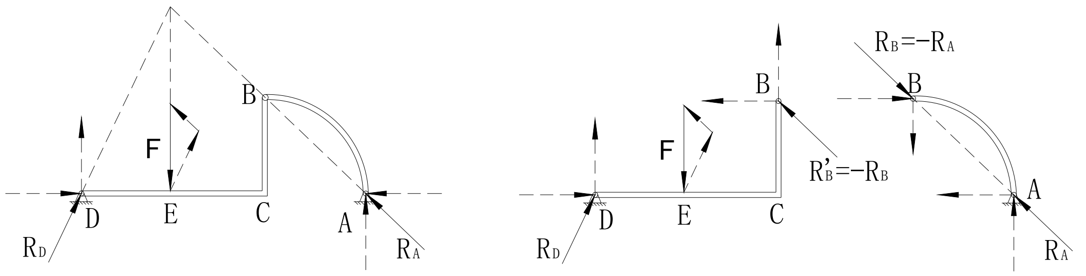
如图 1-18（i）所示。容易证明图-18（i）上 *A* 点的三角形与图 1-18（g）、图 1-18（h）上 *A* 点的三角形全等。同样图-18（i）中所确定的 *AB* 杆上 *A* 点、*B* 点；*AC* 杆上 *A* 点、*C* 点；作为质点的销钉 *A* 点上的合力是和图-18（g）、图 1-18（h）两图所确定的相同。

从以上①、②、③种情况分析可知，对于作用在中间铰连接约束处的主动力可以看作是作用在中间铰连接处的销钉上或销钉连接的物体（刚体）上。



(a)

例：试画出图 1-19 整体和 *AB* 曲杆、*BCD* 折杆的受力图（各杆均视为刚性杆，且不计杆重）。



(b)　　　　　　　　　　　　(c)

图 1-19

解：受力分析：*A*、*D* 处为固定铰支座约束；*B* 处为曲杆和折杆和中间铰支座约束；折杆 *F* 处受主动力（载荷）***F*** 作用。

（a）整体受力图

由固定铰支座约束反力特点，在 *A*、*D* 处可用相互正交的约束反力分别取代 *A*、*D* 处的固定铰支座。但由于整体结构处处平衡状态，因此考虑应用二力构件（二力杆）、三力汇交平衡定理、作用与反作用定律进一步确定约束反力的方向和大小。

AB 曲杆：二力构件（二力杆），确定 $\boldsymbol{R}_A$ 方位。

BCD 析杆：三力汇交平衡定理，确定 $\boldsymbol{R}_D$、$\boldsymbol{R}_A$ 的方向、大小。

受力如图 1-19（b）所示。

（b）*AB* 曲杆、BCD 析杆受力图

将 *B* 处的销钉与 *AB* 曲杆（或 *BCD* 折杆）视为同一刚体。

AB 曲杆：二力构件（二力杆），确定 $\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$ 的方位。且 $\boldsymbol{R}_A = —\boldsymbol{R}_B$（二力平衡公理）。

BCD 析杆：三力汇交平衡定理，$\boldsymbol{R}'_B = -\boldsymbol{R}_B$（作用力与反作用力定律）。确定 $\boldsymbol{R}_D$、$\boldsymbol{R}'_B$ 大小、方向。进一步研究 $\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$。

正确画出研究对象的受力图，是分析解决静力学和动力学问题的前提和基础。因此在对研究对象画受力图时必须注意以下几点：

1．必须明确研究对象。

2．熟练掌握各种约束的性质（细长柔索约束、光滑接触面约束、中间铰支座约束、固定铰支座约束、可动铰支座约束及球铰支座约束）。并能够正确地画出约束的约束反力表示。

3．画出研究对象的示意图；将所有作用在所确定研究对象上的主动力画在示意力上；将作用在研究对象上的约束一一去掉，代之以与约束性质所要求的约束反力。

4．对平衡状态的研究对象判断二力构件（二力杆），应用二力平衡公理，三力汇交平衡定理和作用与反作用定律。