第三章　力偶理论

在第二章中对刚体上作用的力系为汇交（包括共点）力系的合成与平衡进行了分析，并用几何法和解析法分别给出了由 $\boldsymbol{F}_1$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 表示的主矢（或合力）及平衡条件。刚体上作用力系构成汇交（共点）力系是刚体静力学问题的一种基本情况。除这种情况外，当刚体上作用二个 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 力，且 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 大小相等、方向相反，作用线平行（但不共线），此时作用在刚体上的 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 构成静力学基本问题的另一种基本情况。即刚体受力偶作用的问题。

§3-1　力偶的基本概念

如图 3-1 所示，刚体上作用 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 两个大小相等、方向相反、作用线平行（但不共线）的力。由二力平衡公理可知<<刚体上作用二个力，刚体平衡的必要充分条件为：作用在刚体上的两个力大小相等、方向相反、作用线在同一直线上。>>此时刚体未处于平衡状态。即刚体在一对大小相等、方向相反、作用线平行（但不共线）的 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 力作用处于运动状态。且称作用在刚体上的一对 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 构成的特殊力系为力偶。

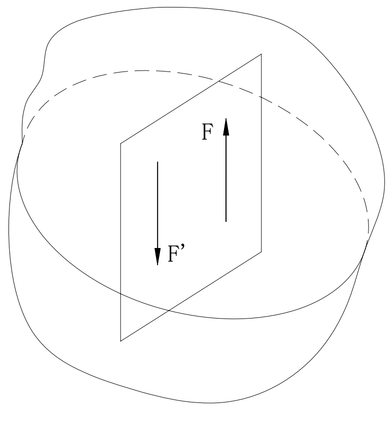


图 3-1

力偶：一对大小相等、作用方向相反、作用线平行（但不共线）的力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 所构成的力系称为力偶，记为（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）。

当刚体上作用一力偶（实际上是一个特殊的力系）时，由二力平衡公理可知其

处于运动状态。并称这种运动状态为刚体的转动状态。所谓刚体的转动状态，实质上就是力偶对钢体作用时刚体的力学效应，或称为转动效应。

应当特别注意的是转动效应（或转动状态）与定轴转动不能完全等同。或者说，在力偶作用下的刚体处于转动状态，但刚体上作用力偶并不唯一地给出（定轴）转动。只有当刚体在力偶的作用下，且刚体上的两点的位移被约束为相对惯性参考系（体）静止时，刚体的转动状态被称为绕以被约束的两点所在直线（该直线上的所有点同样被约束为相对惯性参系静止）为轴的定轴转动。

设刚体上作用力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）。将 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 作为不限制作用点的自由矢量，由自由矢量的加法运算可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} + (-\boldsymbol{F}) \\ &= -\boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}' = 0\end{aligned}$$

该式表明力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）的主矢为零矢量。显然，当刚体上作用的力系的主矢为零矢量时刚体并不一定处于平衡状态。同时力偶的主矢为零矢量还表明力偶不可能与一不为零的力对刚体的力学效应等效。因为如果力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）与不为零的 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 等效（力学效应相同），则用 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 代替力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$），刚体的力学效应应该完全相同。（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）与 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 的主矢不相等，这与力学效应相同相予盾。因此力偶不能与不为零的力等效。力偶当然也不能与一个为零的力相等效。因为刚体在为零的力作用下处于平衡状态。而在力偶不能与一个力（无论是为零的力，还是不为零的力）相等效。因此力偶是力学问题分析中的一个基本量。

力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）的性质：

（1）力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）中 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 的作用线所确定的平面称为力偶作用面。

（2）力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）中 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 的作用线之间的距离称为力偶臂。力偶臂通常用字母 d 表示。

（3）对力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）定义：

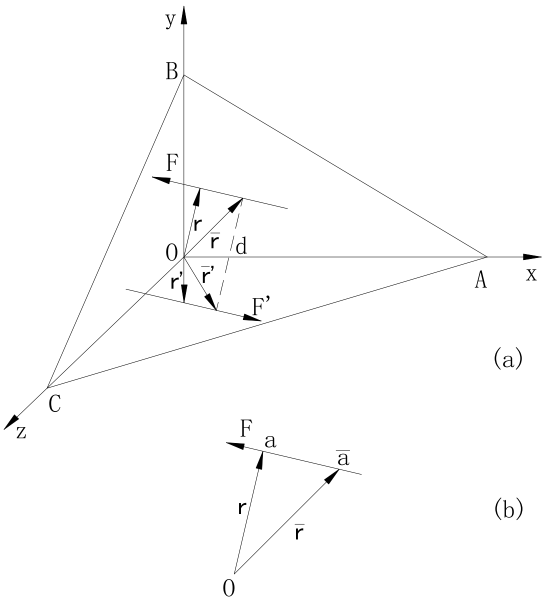
$$M = |Fd| = \pm F'd \qquad （3\text{-}1）$$

式中 M 称为力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）的力偶矩。$|M|$表示力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）对刚体产生的转动效应的强弱；而 M 的符号表示转动的转向。通常对观察者，或对给定的坐标系，当力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）使刚体作逆时针转动时，力偶矩为正；反之为负。

<<注：（3-1）式给出的是在力偶作用平面内的力偶矩定义。如图所示坐标系中，（3-1）给出的是力偶作用面为 xoy 面时的力偶矩定义。对于空间一般情况下（力偶作用面为图 3-2（a）中 ABC 面的情况），力偶矩的定义是由

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}'$$

所定义的。如图 3-2（b）所示。



$$\mathrm{r}\times\mathrm{F} = (\bar{\mathrm{r}}\times\overrightarrow{\bar{a}a})\times\mathrm{F} = (\bar{\mathrm{r}}\times\frac{\mathrm{F}}{F}\overline{aa})\times\mathrm{F} = \bar{\mathrm{r}}\times\mathrm{F}$$

图 3-2

$$\therefore \quad \begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F} = \bar{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{F} + \overline{\boldsymbol{r}'}\times(-\boldsymbol{F}) \\ &= (\overline{\boldsymbol{r}'} + \boldsymbol{d})\times\boldsymbol{F} - \overline{\boldsymbol{r}'}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{d}$ 是 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 作用线上与 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 垂直的直线的交点所确定的矢量，$\boldsymbol{d}$ 是常矢量，$\boldsymbol{d}$ 的模就是 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 两作用线的距离。因此

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F} = dF\boldsymbol{n} \qquad （\mathrm{i}）$$

$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 按右手法则确定的方向上单位矢量。即 ABC 面的单位外法线方向。显然由（i）式定义的力偶矩是一个矢量。力偶矩矢量 $\boldsymbol{M}$ 的大小$|\boldsymbol{M}|=M=Fd$。若 ABC 面就

是 xoy 面，则 xoy 面内的力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）的力偶矩为

$$\boldsymbol{M} = Fd\boldsymbol{k} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{M} = -Fd\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{k} = \pm Fd$$

该式即（3-1）式 M 的定义。>>

4）力偶矩的单位为牛顿・米（N・m），或千牛顿・米（kN・m）。

§3-2　平面力偶理论

若作用在刚体上的力偶系（若干个力偶的集合）的力偶作用平面都是同一平面。则称刚体上作用的力偶系为平面力偶系。对平面力偶系，若不说明，其力偶作用平面取为 xoy 坐标面。

平面二力偶平衡公理：

当刚体上作用两个同平面的平面力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$），（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）时，刚体处于无转动状态的充分必要条件是两力矩的力偶矩大小相等、转向相反。即

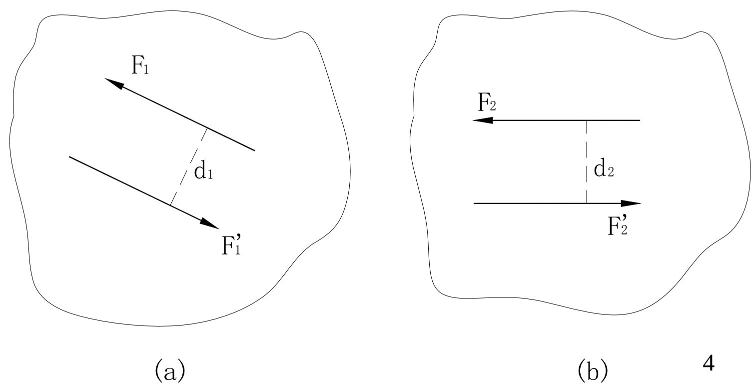
$$M_1 = -M_2 \tag{3-2}$$

平面力偶的等效条件为：两力偶的力偶矩大小相等，转向相同。即

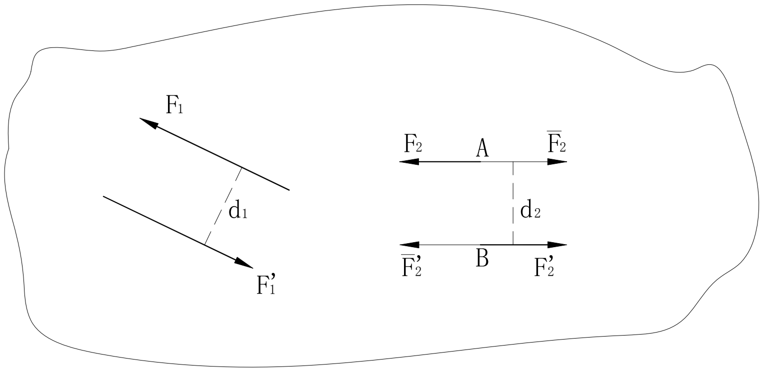
$$M_1 = M_2 \tag{3-3}$$

证明：

如图 3-3 所示为作用在同一刚体上两种情况的力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$），（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）。在刚体上作用图 3-3（a）



力偶的情况下，在 $\boldsymbol{F}_2$ 作用线上选定刚体上一点 A。按加减平衡力系公理，加上一对平衡力 $\boldsymbol{F}_2$、$\overline{\boldsymbol{F}}_2$；在 $\boldsymbol{F}_2'$ 作用线上选定刚体上一点 B。按加减平衡力系公理，加上一对平衡力 $\boldsymbol{F}_2'$、$\overline{\boldsymbol{F}}_2$。如图 3-3（c）所示。



(c)

图 3-3

刚体上现在作用有三个力偶（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$），（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$），（$\overline{\boldsymbol{F}}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）。且其对应的力偶矩分别为：

$$M_1 = F_1 d_1\;；\;M_2 = F_2 d_2\;；\;M_3 = -F_2 d_2\;；$$

∵

$$M_1 = M_2 = -M_3$$

显然按平面力偶平衡公理，（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$）和（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）构成一对平衡力偶。在由加减平衡力系公理，在刚体中减去由 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$、$\overline{\boldsymbol{F}}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$ 力系构成的平衡力系。最后得到了（b）图所示的情况。在以下在整个过程中使用了加减平衡力系公理，并未改变刚体的力学效应。因此（a）、（b）两种情况力学效应等效。即作用在刚体上的力偶（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$）可用（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）力偶等效，只要两力偶的力偶相等。

平面力偶系的合成：

刚体上作用的 n 个力偶（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$），…，（$\boldsymbol{F}_n$、$\boldsymbol{F}_n'$）对刚体的作用效应与力偶

$\left(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1}+\cdots+\boldsymbol{F}_n\dfrac{d_n}{d_1},\boldsymbol{F}_1'+\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}+\cdots+\boldsymbol{F}_n'\dfrac{d_n}{d_1}\right)=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 对刚体的作用效应相同。且称（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）力偶是（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$），…，（$\boldsymbol{F}_n$、$\boldsymbol{F}_n'$）这几个力偶的合成力偶。或称为合力偶。

证明：

如图 3-4 所示，在 $\boldsymbol{F}_1$ 作用线上加上一个力 $\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1}$；在 $\boldsymbol{F}_1'$ 作用线上加上一个力 $\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}$。显然 $\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1}$、$\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}$ 构成一个力偶 $\left(\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1},\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}\right)$。该力偶的力偶矩为 $\overline{M}_2=F_2\dfrac{d_2}{d_1}d_1=F_2d_2=M_2$ 即力偶 $\left(\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1},\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}\right)$ 与（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）等效。因此可在刚体上用力偶

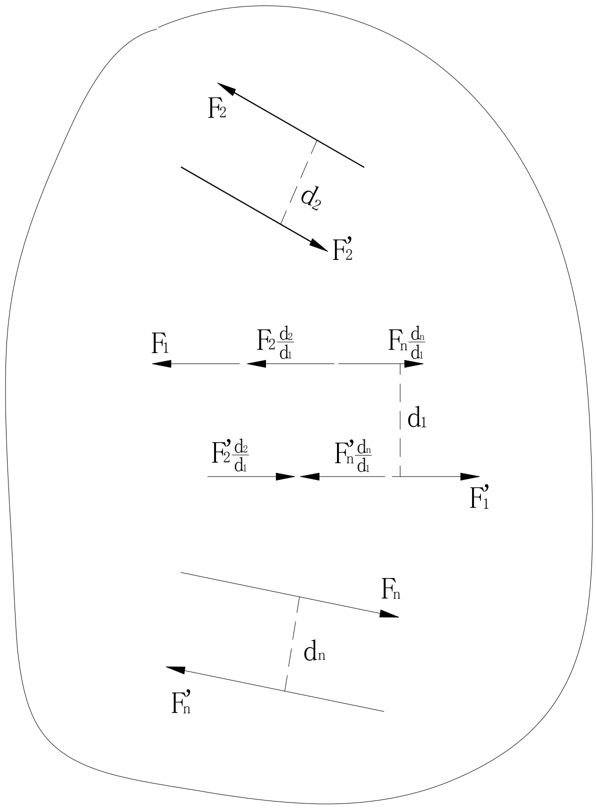


图 3-4

$\left(\boldsymbol{F}_2\dfrac{d_2}{d_1},\boldsymbol{F}_2'\dfrac{d_2}{d_1}\right)$ 等效代替（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）力偶。依次对（$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_3'$），…，（$\boldsymbol{F}_n$、$\boldsymbol{F}_n'$）作同样的等效代替最后得到与（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$），…，（$\boldsymbol{F}_n$、$\boldsymbol{F}_n'$）等效的

$$\left(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\frac{d_2}{d_1}+\cdots+\boldsymbol{F}_n\frac{d_n}{d_1}、\boldsymbol{F}_1'+\boldsymbol{F}_2'\frac{d_2}{d_1}+\cdots+\boldsymbol{F}_n'\frac{d_n}{d_1}\right)=\left(\boldsymbol{F}、\boldsymbol{F}'\right)$$合力偶。合力偶（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$）的力偶矩为

$$M=Fd$$

∵ $|\boldsymbol{F}|=\left|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\frac{d_2}{d_1}+\cdots+\boldsymbol{F}_n\frac{d_n}{d_1}\right|$，$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2\frac{d_2}{d_1}$、$\cdots$、$\boldsymbol{F}_n\frac{d_n}{d_1}$的作用线相同。

∴ $|\boldsymbol{F}|=\pm|\boldsymbol{F}_1|\pm\frac{d_2}{d_1}|\boldsymbol{F}_2|+\cdots+\frac{d_n}{d_1}|\boldsymbol{F}_n|=\boldsymbol{F}$

$$\begin{aligned}M&=Fd=\pm F_1d\pm F_2d_2+\cdots+F_nd_n\\&=M_1+\cdots+M_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\end{aligned}\tag{3-4}$$

试式表明，刚体上作用 n 个平面力偶时，其合力偶的力偶矩是 n 个力偶的力偶矩的代数和。

平面力偶系的平衡

平面力偶系平衡的充分必要条件是：作用在刚体上所有平面力偶的力偶矩矢量和为零矢量。即

$$\mathbf{M}=\boldsymbol{M}_1+\cdots+\boldsymbol{M}_m=0$$

由（3-4）式，对平面力偶系作用的刚体，刚体平衡的充分必要条件为：作用在刚体上的 m 个力偶的力偶矩的代数和为零。即

$$M_1+\cdots+M_m=0$$

例 3-1　如图 3-5 所示机构在两力偶作用下平衡。已知：M_1=100N·m，O_1A=40cm，O_2B=60cm，各杆自重不计。试求 M_2=?

解：

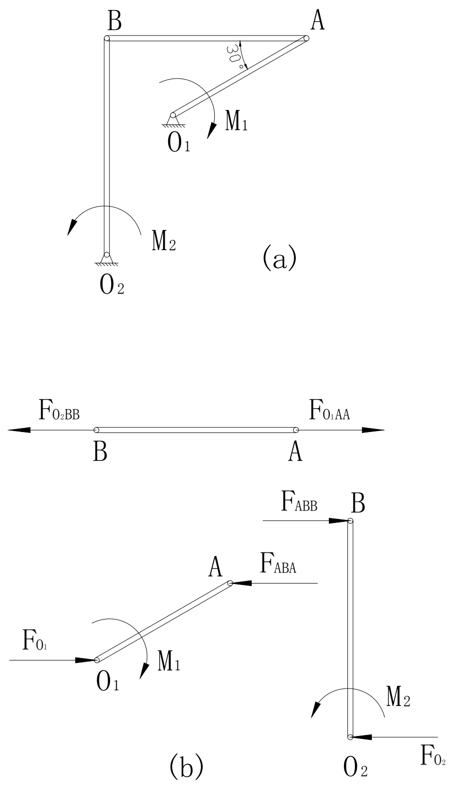


图 3-5

首先分析机构整体。O_1、O_2 处为固定铰支座约束。即在 O_1、O_2 处可分别用相互正交的约束反力表示固定铰支座对机构的约束。且这两处的四个约束反力均为未知，同时也不构成汇交力系。因此无法用汇交力系的平衡条件去求解。

由于对机构整体无法求解。因此只能考虑对机构中各构件进行分析。

O_2B 杆：O_2 处受图定铰支座的（一对正交）约束反力；杆上作用未知力偶 M_2；B 处受 AB 杆作用的（一对正交）约束反力。所有力不构成汇交力系。

AB 杆：二力构件。

O_1A 杆：O_1 处受固定铰座的（一对正交）的约束反力；杆上作用已知 M_1；A 处受 AB 杆作用的（一对正交）约束反力。所有力不构成汇交力系。

由 AB 杆为二力构件可确定，O_1A 杆在 A 点所受 AB 杆的作用力 F_{ABA} 的作用线沿 AB 杆 AB 两点连线。(二力杆是分析问题的突破口)。因此选择 O_1A 杆为分析对象。受力分析图见图（b）。

O_1A 杆在 A 点受 F_{ABA}，杆上受力偶 M_1 作用，在 O_1 点受固定铰支座的约束反力作用。由于力偶只能与力偶平衡的特点。显然当 O_1A 平衡时，O_1 处的约束约束反力必须与 F_{ABA} 构成一力偶（$\boldsymbol{F}_{01}$，$\boldsymbol{F}_{ABA}$）。且该力偶与 M_1 力偶平衡。即二力偶矩满足：

$$-M_1+F_{ABA}\overline{O_1A}\sin 30°=0$$

（此处对平面力偶规定逆时针转动时其力偶矩为正；反之为负）

$$F_{ABA}=\frac{100}{40\times 10^{-2}\times\frac{1}{2}}=500\text{ N}$$

（此处强调计算表达式中应采用国际标准单位）

对 AB 杆：$\boldsymbol{F}_{O_1AA}$ 与 $\boldsymbol{F}_{ABA}$ 为作用力与反作用力：

$$\boldsymbol{F}_{O_1AA}=-\boldsymbol{F}_{ABA}\ ;\quad F_{O_1AA}=500\text{ N}$$

$\boldsymbol{F}_{O_1AA}$ 与 $\boldsymbol{F}_{O_2BB}$ 为一对平衡力：

$$\boldsymbol{F}_{O_2BB}=-\boldsymbol{F}_{O_1AA}=\boldsymbol{F}_{ABA}\ ;\quad F_{O_2BB}=500\text{ N}$$

对 O_2B 杆：$\boldsymbol{F}_{ABB}$ 与 $\boldsymbol{F}_{O_2BB}$ 为作用力与反作用力：

$$\boldsymbol{F}_{ABB}=-\boldsymbol{F}_{O_2BB}=-\boldsymbol{F}_{ABA}\ ;\quad F_{ABB}=500\text{ N}$$

$\boldsymbol{F}_{ABB}$ 与 $\boldsymbol{F}_{O_2}$ 构成力偶（$\boldsymbol{F}_{ABB}$，$\boldsymbol{F}_{O_2}$）与 M_2 平衡。

$$-F_{ABB}\overline{O_2B}+M_2=0$$

$$M_2=500\times 60\times 10^{-2}=300\text{ N}$$

§3-3　空间力偶理论

对每一个给定的力偶，由（i）式给出了与该力偶对应的力偶矩。当力偶系中每一个力偶对应的（i）式中的力偶矩矢量 $\boldsymbol{n}$ 是同一矢量时。该力偶系称为平面力偶系。而对力偶系中的每一力偶对应的（i）式中的力偶矩矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向各不相同是。该力偶系称为空间力偶系。

按力偶对应的（i）式中的力偶矩矢量，对空间力偶系有如下结论：

空间两力偶等效的条件： 两力偶对应的力偶矩矢量相等。即

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2 \tag{3-5}$$

空间力偶系的合成： n 个力偶构成的空间力偶系对刚体的转动效应可以等效为一个力偶对刚体的转动效应。与 n 个力偶等效的力偶称为这 n 个力偶的合力偶。且合力偶对应的力偶矩矢量等于 n 个力偶对应的力偶矩的矢量和。即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{M} \tag{3-6}$$

空间力偶系的平衡： 空间力偶系平衡的充分必要条件为：合力偶对应的力偶矩矢量为零矢量。即

$$\boldsymbol{M}=0;\quad \boldsymbol{M}_1 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = 0 \tag{3-7}$$

若在惯性参考系（体）上建立标准正交坐标系{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}。则（3-5）、（3-6）、（3-7）可在{O；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$}中表示为：

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2$$

$$\begin{cases} M_{1x} = M_{2x} \\ M_{1y} = M_{2y} \\ M_{1z} = M_{2z} \end{cases} \tag{3-8}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \cdots + \boldsymbol{M}_n$$

$$\begin{cases} M_x = M_{1x} + \cdots + M_{nx} \\ M_y = M_{1y} + \cdots + M_{ny} \\ M_z = M_{1z} + \cdots + M_{nz} \end{cases} \tag{3-9}$$

$$\begin{cases} |\boldsymbol{M}| = M = \sqrt{(M_{1x} + \cdots + M_{nx})^2 + (M_{1y} + \cdots + M_{ny})^2 + (M_{1z} + \cdots + M_{nz})^2} \\ \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{i}) = \dfrac{M_{1x} + \cdots + M_{nx}}{M} \\ \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{j}) = \dfrac{M_{1y} + \cdots + M_{ny}}{M} \\ \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{k}) = \dfrac{M_{1z} + \cdots + M_{nz}}{M} \end{cases}$$

（3-10）

$$\boldsymbol{M} = 0$$

$$\begin{cases} M_{1x} + \cdots + M_{nx} = 0 \\ M_{1y} + \cdots + M_{ny} = 0 \\ M_{1z} + \cdots + M_{nz} = 0 \end{cases} \qquad （3\text{-}11）$$

例 3-2　如图 3-6 所示。试求二力偶（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_1'$）、（$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_2'$）的合力偶（$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$）的力偶矩矢量。（F_1=200kN，F_2=100kN）

解：　$\boldsymbol{d}_1 = 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{F}_1 = 200\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{d}_2 = 2\boldsymbol{j}$；$\boldsymbol{F}_2 = 20(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{F}_1 = -400(2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = 40(4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k})$

$M_{1x} = 0$ ；　$M_{1y} = -800$ kN.m ；

$M_{1z} = -400$ kN.m

$M_{2x} = 160$ kN.m ；　$M_{2y} = 0$ ；

$M_{2z} = -120$ kN.m

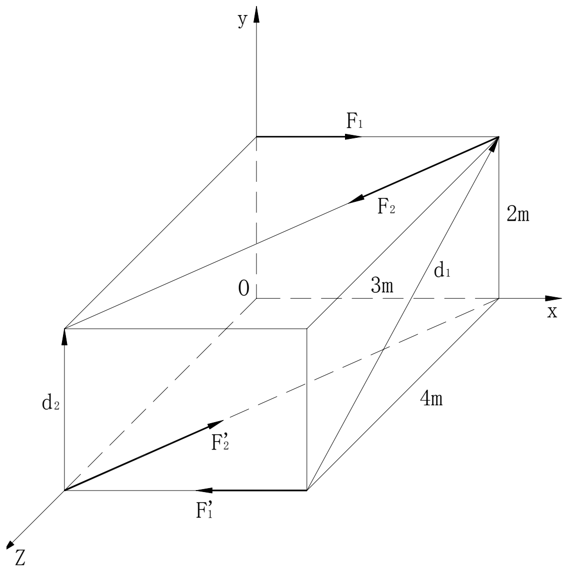


图 3-6

$$M = \sqrt{160^2 + 800^2 + 520^2} = 967.47\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{i}) = \frac{M_{1x} + M_{2x}}{M} = \frac{160}{967.47} = 0.16538\ ;\quad \alpha = 80.48°$$

$$\cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{j}) = \frac{M_{1y} + M_{2y}}{M} = \frac{-800}{967.47} = -0.82690\ ;\quad \beta = 145.78°$$

$$\cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{k}) = \frac{M_{1z} + M_{2z}}{M} = \frac{-520}{967.47} = -0.53748\ ;\quad \gamma = 122.51°$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = (2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) \times 200\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}x(-60\boldsymbol{i} + 80k)$$

$$= 40(4\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{k}) = 40\sqrt{585}(4\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{k}) / \sqrt{585}$$

$$= 40\sqrt{585}\boldsymbol{n}$$

M = 967.47 kN • m

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = 4 / \sqrt{585} = 0.16538 = \cos\alpha\ ;\quad \alpha = 80.48°$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j} = -20 / \sqrt{585} = -0.82690 = \cos\beta\ ;\quad \beta = 145.78°$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = -13 / \sqrt{585} = 0.53748 = \cos\gamma\ ;\quad \gamma = 122.51°$$