第 1 章 线性规划

线性规划是运筹学的一个十分重要的分支，自 1949 年丹捷格提出了求解线性规划问题的单纯形法后，线性规划的应用日趋增多，现国内外盛行。

线性规划所解决的问题主要分为两类：一类是在资源（人力、物力、财力……）一定的情况下，我们如何利用这些有限的资源来完成最多的任务。另一类是在任务确定的情况下，我们如何利用最小的资源完成这个确定的任务。

要用线性规划解决一个实际问题，一般来说，都需要首先根据待要解决的问题，建立线性规划的数学模型，其次对已得模型利用计算机求解，得出优解，再施于实践。故此，这里我们首先考虑线性规划的数学模型。

1.1 线性规划的数学模型

建模是解决线性规划问题的极为重要的一个环节，一个正确数模（数学模型）的建立，要求建模者熟悉问题的生产情况和管理内容，明确目的要求和错综复杂的已知与未知条件，以及它们之间二者相互关系，而一些已知数据还要通过大量的调查和统计资料获取可靠的原始数据加以证实。对初学者来说，要求我们怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学的角度有条理的表述出来，掌握建模的分析问题的步骤及方法。

一般来说，一个待建模的线性规划问题需满足以下条件，方可入手。

（1）所求问题的目标一定能表示为最大化或最小化问题，例如，求最小成本或人力投资等，材料储备的最大利用，企业的最大利润等问题。

（2）问题一定要具备有达到目标的不同方法，即必须要有选择的可能性。

（3）要达到的目标是有限制条件的。

（4）问题的目标和约束都能表示为线性式。

以下我们将通过几个实例来说明建模的思路及线性规划在实际问题中的应用，并随之引出线性规划的标准模型。

1.1.1 线性规划问题举例

例 1.1 （资源利用问题）设某建筑公司的预制厂利用沙，石，灰三种原料 A_1，A_2，A_3，来生产两种产品 B_1 和 B_2，已知该厂各种原料的现有数量，每单位产品对各种原料的消耗量及所获利润如下表 1-1 所示。

现在的问题是，在这些现有的资源条件下，如何分配产品 B_1，B_2 的生产，才使公司取得利润最大。

表 1-1

单位产品的消耗 产品 / 原料	B_1	B_2	原料现有数（M^2）
A_1	1	3	90
A_2	2	1	80
A_3	1	1	45
单位利润（百元）	5	4	

分析：1.确定未知变量，设 x_1 表示 B_1 的生产数量，x_2 为产品 B_2 的生产数量。

2.因为所求问题的目标是要求公司取得最大利润，所以，设利润函数为 $f(x)$，则 $f(x)=5x_1+4x_2$（百元）。

3.问题的约束资源限制为各种原料的现有数，所以，有关系式：

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 90 \\ 2x_1+x_2\le 80 \\ x_1+x_2\le 45 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

归纳 1，2，3 式得出该问题为：

求满足

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 90 \\ 2x_1+x_2\le 80 \\ x_1+x_2\le 45 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

并使 $f(x)=5x_1+4x_2$ 最大的一组数 $(x_1,x_2)^T$。

一般的，设用 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 种原料，可以生产 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 种产品，已知 A_i 种原料为 a_i 单位，B_j 种单位产品所需 A_i 种原料 a_{ij} 单位，B_j 种单位产品的利润为 C_j 元，问应如何组织生产才能获得最大利润？

解：设 x_j 为生产产品 $B_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的计划数，那么这一类问题的数学模型为：求一组变量 $x_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使它满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\le a_i\,(i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j\ge 0\,(j=1,2,\cdots,n)$$

并使利润函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j$ 的值最大。

例 1.2 （物资调运问题）

设有两个砖厂 A_1,A_2,变量分别为 23 万和 27 万块砖，它的产品供应 B_1,B_2,B_3 三个工地，需要量分别为 17 万块、18 万块和 15 万块，已知从 A_1,A_2,分别向 B_1,B_2,B_3 运送 1 万块砖需要的运费如表 1-2 所示。

运价表（单位：万块） 表 1-2

运价 \ 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问如何调运才使的总运费最小?

解：设 x_{ij} 表示有砖厂 A_i 运往工地 B_j 的砖的数量（单位：万块）（$i=1,2;\ j=1,2,3$）

因为，由砖厂 A_i 运往三个工地的砖数总和应等于 A_i 的产量，从而有约束式：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{ij}\ge 0\left(i=1,2;\ j=1,2,3\right) \end{cases}$$

又因为由 A_1,A_2,两个砖厂运到各地的砖数总和应等于各工地的需求量，所以又得约束式：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\ge 0\left(i=1,2;\ j=1,2,3\right) \end{cases}$$

于是，该运输问题归结为：

求一组满足条件:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\ge 0\left(i=1,2;\ j=1,2,3\right) \end{cases}$$

并使 $f(x)=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$ 最小的 x_{ij} （$i=1,2;\ j=1,2,3$）。

一般的，设某种物资有 m 个产地：$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 联合供应 n 个销地：$B_1,B_2,\cdots,B_n$。

各产地产量（单位：吨），各销地销量（单位：吨），各产地至各销地单位运价（单位：元/吨）如表 1-3 所示。

表 1-3

单价（元/吨） 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（吨）
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mn}	a_m
销量（吨）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表中：a_i 表示产地的产量 A_i 的产量 $(i=1,2,\cdots,m)$

b_j 表示销地 B_j 的销量 $(j=1,2,\cdots,n)$

C_{ij} 表示 A_i 到 B_j 间的单位运价（元/吨）$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。问应如何调运，才能使总运费最小？

解：当产销平衡（即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ ）时，设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。

那么，上述运输问题的数学模型为：

求一组变量 x_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使它满足约束条件：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\ge 0\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

并使目标函数 $f(x)=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots+C_{mn}x_{mn}$ 的值最小。

利用连加号（$\sum$），这一数学模型可以写为：

求一组变量的值 x_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，使它满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \ge 0 (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

并且使目标函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

如果运输问题中，没有产销平衡这一限制，当产大于销时（即$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$），这一问题的数学模型应为：

求一组变量 $x_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i (i=1,2,\cdots,m)$$

（产地 A_i 发到各销地得发量总合不超过 A_i 的产量）

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j=1,2,\cdots,n)$$

（各产地发到销地 B_j 的发量总合应等于 B_j 的产量）

$x_{ij} \ge 0\ (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ （调运量不能取负值）

并且使目标函数 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

例 1.3 （节约下料问题）

设有一批规格为 10 米长的圆钢筋，将它截成分别为 3 米，4 米长的预制构件的短钢筋各 100 根，问怎样截取最省料。

解：因为，10 米长的钢筋截为 3 米或 4 米长，共有三种截法：

$$\begin{cases}\text{截法 I}：3\quad 3\quad 3\quad 1\quad \text{米} \\ \text{截法 II}：3\quad 3\quad 4\quad 0\quad \text{米} \\ \text{截法 III}：4\quad 4\quad 0\quad 2\quad \text{米}\end{cases}$$

所以，设按截法 I，II，III 各截取 10 米长的钢筋分别为 x_1, x_2, x_3 根，

则该问题归纳为：求满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 100 \\ x_2 + 2x_3 = 100 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

并使得总钢筋数 $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$ 最小的一组数 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

一般的，设用某原材料（条材或板材）下零件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的毛坯，根据过去经验在一件原材料上有 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种不同的下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要量如下表 1-4 所示，问应怎样安排下料方式，使得既得满足需求，用的原料又小。

解：设采用 B_j 种方式下料时，需要的原材料数为 x_j ，则这一问题的数学模型为：

求一组变量的值 x_j （ $j = 1, 2, \cdots, n$ ），使它满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_j \geq a_i \ (i = 1, 2, \cdots, m) & \text{（所下的 } A_i \text{ 零件总数不能低于 } a_i \text{）} \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

并且使目标函数 $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j$ 的值最小。

表 1-4

各种方式下的零件个数 / 下料方式 / 零件名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	零件需要量
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mn}	a_m

例 1.4 （投资计划问题）

一个公司制订投资计划问题的关键是在预算范围内，合理选择投资项目，使总的资金回收额达到最大。

例如，某建筑企业拥有 20 万资金，拟在今后五年内对下列项目投资。已知：

项目 A：从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；

项目 B：第三年年初需要投资，到第五年末能回收本利 125%，但规定最大投资不超过 8 万元；

项目 C：第二年初需要投资，到第五年末能回收本利 140%，但规定最大投资额不超过 6 万元；

项目 D：五年内每年年初可购买公债或定期储蓄，于当年末归还，并加利息 9%。

现要求确定这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金本利总额为最大。

分析：

1．假设变量，设以 $x_{iA},x_{iB},x_{iC},x_{iD}(i=1,2,3,4,5)$ 分别表示第年 i 年初给项目 A，B，C，D 的投资额。

2．资金流转分析，原则是每年年初应把资金全部投出去，手中不留呆滞资金。因此，第一年年初将 20 万元资金投给 A，D 项目，有

$x_{1A}+x_{1D}=200000$，则年底回收项目 D 的本息为：$x_{1D}(1+9\%)=1.09x_{1D}$

这些资金应在第二年年初投资给 A，C，D 三个项目，故有 $x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.09x_{1D}$

第二年年底回收项目 A 的第一年投资和项目 D 当年投资的本利总合为：$1.15x_{1A}+1.09x_{2D}$ 这些资金在第三年初投资给项目 A，B，D，有

$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.09x_{2D}$ 第三年底回以 A 项的第二年投资和 D 项当年投资的本利总合为：$1.15x_{2A}+1.09x_{3D}$

类似的，可得第四年投资为：$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.09x_{3D}$

第五年投资为：$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.09x_{4D}$

第五年年底共回收资金：

项目 A：$1.15x_{4A}$

项目 B：$1.25x_{3B}$，且 $x_{3B}\le 80000$

项目 C：$1.40x_{2C}$，且 $x_{2C}\le 60000$

项目 D：$1.09x_{5D}$

从而得到该投资问题的模型为：求 $x_{iA},x_{iB},x_{iC},x_{iD}(i=1,2,3,4,5)$，使其满足

$$\begin{cases}x_{1A}+x_{1D}=200000\\-1.09x_{1D}+x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=0\\-1.15x_{1A}-1.09x_{2D}+x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=0\\-1.15x_{2A}-1.09x_{3D}+x_{4A}+x_{4D}=0\\-1.15x_{3A}-1.09x_{4D}+x_{5D}=0\\x_{3B}\le 80000\\x_{2C}\le 60000\\x_{iA},x_{iB},x_{iC},x_{iD}\ge 0(i=1,2,\cdots,5)\end{cases}$$

并使 $f\left(x\right)=1.15x_{4A}+1.25x_{3B}+1.40x_{2C}+1.09x_{5D}$ 最大。

例 1.5 （混凝土搅拌站选址问题）

在一个联合协作多点开口建筑施工的场地中，一个大型搅拌站的安装位置，对施工的进度将起很大的作用，特别是基础浇灌阶段更为重要，由此，我们来建立一个选址问题的数学模型。

设共有 n 个施工地点（广义的称需求点），有 m 个可供选择建站的地点（广义的称

为供应点)，每个点至多建立一个搅拌站，现设在地点 i 建站的生产能力为 r_i（单位：立方米)，在地点 i 搅拌站生产的单位时间的固定成本为 F_i（F_i 可用固定资产折旧来衡量）施工点 j 的需求量为 S_j，从搅拌站 i 到施工点 j 的单位运费为 C_{ij}。

设 x_{ij} 为从搅拌站 i 向施工点 j 供应的混凝量（单位：立方米）

u_i 表示是否选择地点 i 建立搅拌站，

则 $u_i=\begin{cases}1，若选i点\\0，若不选i点\end{cases}$

归纳得到数模：求满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le r_i u_i(i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ge S_j(j=1,2,\cdots n)\\ x_{ij}\ge 0;u_i\text{ 取}0\text{或}1(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并使 $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}F_i u_i$ 取最小值的 $x_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$

综合上述各例，不难看出我们所建立的数学表示都具有一个共同特点：要求出一组非负数 $x_{ij}\ge 0(j=1,2,\cdots,n)$，且使它们满足一组线性条件（一组线性方程或线性不等式)，并且使得某一关于 n 个变量 x_j 的线性函数取得最大值或最小值。我们把这一类问题统称为线性规划问题。

1.2 线性规划的标准形式

1.2.1 线性规划问题的标准形式

把上节例子加以概括，我们可以把它们抽象成这样一类数学问题：

求满足条件：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\ge(\le\text{或}=)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\ge(\le\text{或}=)b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\ge(\le\text{或}=)b_m\end{cases}\quad(1\text{-}1)$$

$$x_j\ge 0(j=1,2,\cdots,n)\quad(1\text{-}2)$$

并且使 $f\left(x\right)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 取最大（小）值得一组数 x_j $(j=1,2,\cdots,n)$。(1-3)

其中，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，$b_i$ 及 c_i 都是已知常数，（1-1）式中的线性条件

可以是方程式也可以是不等式，亦可以二者兼有。

凡能表为以上形式的问题统称为线性规划问题。

（1-1） 式称为线性规划的约束条件。

（1-2） 式称为线性规划的未知变量（决策变量）。

（1-3） 式称为线性规划的目标函数。

为了讨论方便起见，我们把以上线性规划问题统归成如下标准形式：

求满足约束方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \mathrm{b}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \mathrm{b}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \mathrm{b}_\mathrm{m} \\ x_j \ge 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \\ b_i \ge 0 (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

使 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 最大的一组数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 。

为了叙述方便起见，我们用（L，P）代表以上的标准形线性规划。

1．标准线性规划的矩阵形式：

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ X= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ b= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，则（L，P）的矩阵形式为求满足条件 $\begin{cases} AX = b \\ X \ge 0 \end{cases}$

并且使 $f(x) = CX$ 取最大的一组数 X 。

简记为：$\begin{cases} Max f(x) = CX \\ s.t \begin{cases} AX = b \\ X \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases} \end{cases}$

2．标准线性规划的向量形式

设 $P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 则得（L，P）的向量形式：

$$\begin{cases} Max f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \\ x_j \ge 0 \\ b_j \ge 0 \end{cases} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} Max f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b_j \\ x_j \ge 0 \\ b_j \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

1.2.2 将一般线性规划问题划为标准形式的方法

将非标准形式线性规划为标准形式线性规划时有以下几种情况可能出现，处理的方法有：

1．目标函数为极小化。对目标函数为极小化的问题只要将目标函数乘以（-1）即可化为等价的极大化问题。

2．约束条件为不等式。部分或全部约束条件为不等式有两种情况：

（1）约束条件为不等式或等于形式。对这样的约束，在不等式的左端加上一个非负的新变量即可化为等式。新增的非负变量成为松弛变量。

（2）约束条件为大于或等于形式。对这样的约束，在不等式的左端减去一个非负的新变量即可化为等式。新增的非负变量称为剩余变量，亦可以称为松弛变量。

3．决策变量有非正约束。如果 $x_j \le 0$，则用非负变量 $x_j^{'}$ 代替，使 $x_j = -x_j^{'}$。

4．决策变量 x_j 符号不受限制。标准形式中要求变量为非负，碰到变量无非负约束时，可以用两个非负的新变量之差来代替。如变量 x_j 无非负性要求，则将它写成 $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$，新变量 $x_j^{'}$ 和 $x_j^{''}$ 为非负变量，而 x_j 的符号将由 $x_j^{'}$ 和 $x_j^{''}$ 来确定。

5．决策变量有上下界。对这种情况，可将上下界分别处理。引进新的变量使等于原变量减去上下限值，如此则下限为零，满足标准形式的非负性要求。如已知决策变量 x_j 的限制为 $a_j \le x_j \le b_j$；则以 $x_j^{'} = x_j - a$ 代替 x_j，从而得 $0 \le x_j^{'} \le b - a$，现时的 $x_j^{'}$ 满足了非负要求。并用新变量 $x_j^{'}$ 替换目标函数和约束条件中所有的原变量 x_j，再将上限约束列为新的约束条件并化为等式。

下面举例说明如何将一般非标准形式的线性规划问题划为标准形式的线性规划问题。

例 1.6 将下列线性规划问题化为标准形式：

$$\begin{cases} \max\ f(x)=2x_1 - x_2 + x_3 \\ s.t\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 12 \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3 不限 \end{cases} \end{cases}$$

解：1．因为 x_3 符号不限，以 $x_3^{'}-x_3^{''}=x_3$ 代入目标函数和所有约束条件中，其中，$x_3^{'}$，$x_3^{''}$ 均为非负变量。

2．对第一个约束条件加上松弛变量 x_4 化为等式。

3．对后两个约束条件分别减去剩余变量 x_5 和 x_6 化为等式。

4．为了保持目标函数不变，使 x_4，x_5 和 x_6 的目标系数均为零。得到的标准形式线性规划为：

$$
\begin{cases}
\max f(x)=2x_1-x_2+x_3^{'}-x_3^{''}+0x_4+0x_5+0x_6 \\
s.t\begin{cases}
x_1+3x_2-x_3^{'}+x_3^{''}+x_4=20 \\
2x_1-x_2+x_3^{'}-x_3^{''}-x_5=12 \\
x_1-4x_2-4x_3^{'}+4x_3^{''}-x_6=2 \\
x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\geq 0,x_3^{'},x_3^{''}\geq 0
\end{cases}
\end{cases}
$$

例 1.7 将下列线性规划问题化为标准形式：

$$
\begin{cases}
\min f(x)=x_1+2x_2+4x_3 \\
s.t\begin{cases}
2x_1+x_2+3x_3=20 \\
3x_1+x_2+4x_3=25 \\
x_1,x_2\geq 0,2\leq x_3\leq 6
\end{cases}
\end{cases}
$$

解：1．给目标函数两端同乘（-1），令 $f^{'}(x)=-f(x)$

2．令 $x_3^{'}=x_3-2$ 代入，问题化为：

$$
\begin{cases}
\max f^{'}(x)=-x_1-2x_2-4x_3^{'}-8 \\
s.t\begin{cases}
2x_1+x_2+3x_3^{'}=14 \\
3x_1+x_2+4x_3^{'}=17 \\
x_3^{'}\leq 4 \\
x_1,x_2,x_3^{'}\geq 0
\end{cases}
\end{cases}
$$

将变量 $x_3^{'}$ 的上限约束化为等式，的标准形式为：

$$
\begin{cases}
\max f^{'}(x)=-x_1-2x_2-4x_3^{'}-8+0x_4 \\
s.t\begin{cases}
2x_1+x_2+3x_3^{'}=14 \\
3x_1+x_2+4x_3^{'}=17 \\
x_3^{'}+x_4=4 \\
x_1,x_2,x_3^{'},x_4\geq 0
\end{cases}
\end{cases}
$$

由以上可看出，任何一个线性规划问题都可以化成等价的标准形式的线性规划问题。因此，以后如没有特殊声明，我们讲的线性规划都是指标准形式的线性规划。

1.3 线性规划的基本概念及其基本原理

这一节主要介绍有关线性规划问题解的基本概念及性质，为下节线性规划的单纯形法作好理论上的准备工作。

1.3.1 线性规划问题的解的基本概念

由 1.2 节知线性规划的标准形式为：

$$\begin{cases} \max\ f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geq 0 (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \end{cases}$$

定义 1 称满足线性规划的约束条件（2）和（3）的解 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$，为线性规划问题的可行解。所有可行解组成的集合称为可行域（可行解集）。

定义 2 称满足线性规划目标函数的可行解为线性规划的最优解，即使目标函数达到极大的可行解称为最优解。

定义 3 设 $A=(a_{ij})_{mn}$ 是约束方程组（2）的系数矩阵，其秩为 $m(m<n)$。若 B 是矩阵 A 中 $m\times n$ 阶非奇异子阵（$|B|\neq 0$），则称 B 是线性规划问题的一个基。

由线性代数知，如果 B 是线性规划问题的一个基，那么它一定是由 A 的 m 个线性无关的列向量组成的，为了不失一般性以下设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} =(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_m),\vec{P}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

定义 4 设 B 是线性规划问题的一个基，则称 B 的列向量 $\vec{p}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为线性规划问题的基向量。与基向量 $\vec{p}_j$ 对应的决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为线性规划问题的基变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，我们先要研究方程组（2）的求解问题。

已知（2）的系数矩阵 A 的秩为 $m(m<n)$，故由线性代数的知识知方程组（2）有无穷多个解。不失一般性，不妨假设方程组的前 m 个变量的系数列向量是线性无关的，于是方程组（2）可改写为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_m - a_{mn+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

或$\sum_{j=1}^{m} \vec{P}_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} \vec{P}_j x_j$ ， $\vec{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

由上式左端的系数列向量构成的 m 阶矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (\vec{p}_{1,} \vec{p}_{2,} \cdots, \vec{p}_m)$$

就是方程组（2）的一个基。对应于基的基变量向量用 X_B 表示：

$X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ （T 为转置符号）

在上式中令非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots x_n = 0$ ，则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_m \end{cases}$$

有唯一的解，用高斯消去法可求出方程组的解， $x_0 = (x_1, \cdots, x_m)^T$ ，再加非基变量的零值，得出（2）的一个解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T$

这个解的非零分量的个数不大于方程的个数 m，称这样的解 X 为线性规划的基本解。当非零分量的个数小于 m 时称为退化基本解；当非零分量的个数等于 m 时称为非退化基本解。我们这里主要讨论非退化情形。

由上述定义可知，对于每一个基，就可以求出一个基本解。但一个 $m \times n$ 矩阵 A（秩 $(A) = m$），最多有 C_n^m 个基，因此线性规划最多有 C_n^m 个基本解。

定义 5 满足非负条件（3）的基本解，称为基本可行解。对应于基本可行解称为可行基。显然，线性规划的基本解的个数最多也只能为 C_n^m 个。

定义 6 使目标函数极大的基本可行解称为线性规划的基本最优解。

例 1.8 已知线性规划

$$\left[\begin{array}{l}\max\ f(x)=6x_1+7x_2\\ s.t\begin{cases}2x_1+3x_2\le 12\\ 2x_1+x_2\le 8\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

试求它的基本解及基本可行解。

解：将线性规划标准化为：

$$\left[\begin{array}{l}\max\ f(x)=6x_1+7x_2\\ s.t\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=12\\ 2x_1+x_2+x_4=8\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\because A=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}$，秩$(A)=2$，并且任两个列向量均可组成一个基，从而，每次令其中两个变量的取值为零，解出其余两变量的值，便可得到一个基本解，依次得到 6 个基本解：

$X_1=(0,0,12,8)^T;X_2=(0,4,0,4)^T;X_3=(3,2,0,0)^T$

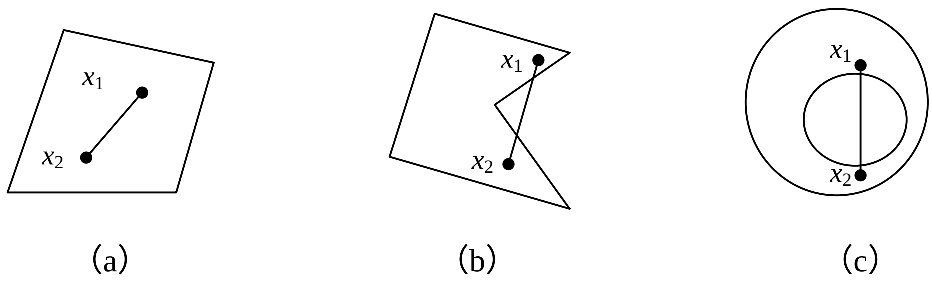
$X_4=(4,0,4,0)^T;X_5=(6,0,0,-4)^T;X_6=(0,8,-12,0)^T$

其中，X_1，X_2，X_3，X_4又为基本可行解。

1.3.2 线性规划的几何概念

定义 7 设M是 n 维欧式空间一点集。若M中的任意两点$X^{(1)},X^{(2)}$的连线上的一切点$\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}(0\le\lambda\le 1)$仍在点集$M$中，则称$M$为凸集。$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

例如三角形、矩形、圆面等都是二维凸集，球体，长方形，圆柱体等都是三维凸集。而圆周，圆环，空心球等都不是凸集。从几何上看，一个无凹、无洞的几何实体才能为凸集。例如图 1-1 中的(a)是凸集，(b),(c)均不是凸集。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

定义 8 设M是凸集，$X\in M$，若X不能为M中的两个不同点$X^{(1)},X^{(2)}$连线上的点$(X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}),(0<\lambda<1)$，则称为凸集$M$的顶点（极点）。

定义 9 设$X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(K)}$是$n$维欧式空间$E^n$中的$K$个点，若存在$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_K$使得

$X=\lambda_1X^{(1)}+\lambda_2X^{(2)}+\cdots+\lambda_KX^{(K)}$

其中$0\le\lambda_j\le 1(j=1,2,\cdots,K)$且$\sum_{j=1}^{K}\lambda_j=1$，则称$X$为$K$个点$X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(K)}$的凸组合。

1.3.3 线性规划的基本原理

定理 1 线性规划问题的所有可行解组合的集合（即可行域）

$$S=\left\{X\,\middle|\,AX=b,X\geq 0\right\}$$

是凸集。

[证] 要证明可行域S为凸集，只要证明S中任意两点的连线的一切点均在S内即可。

设$X^{(1)},X^{(2)}$是可行域S内任意两点，即由可行解的定义知

$AX^{(1)}=b,AX^{(2)}=b,X^{(1)}\geq 0,X^{(2)}\geq 0$。

下证对一切$\lambda(0\leq\lambda\leq 1)$，对$X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}$仍是$S$中的点（仍是可行解）。因为，当$X^{(1)}\geq 0,X^{(2)}\geq 0$，$0\leq\lambda\leq 1$时，有

$X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}\geq 0$

并且有

$AX=A(\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)})=\lambda AX^{(1)}+(1-\lambda)AX^{(2)}=\lambda b+(1-\lambda)b=b$

由此知，$X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}$仍是$S$中的点，故$S$是凸集。

定理 2 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$是可行域S的顶点的充分必要条件是X是基本可行解。

定理 3 若可行域有界，则线性规划问题的目标函数一定在可行域的顶点达到极大值。

另外，若可行域无界，则可能没有最优解，也可能有最优解。如果有最优解也一定在某个顶点上达到。

综合以上讨论的定理，可将重要结论归纳如下：

线性规划问题的所有可行解的集合一般是凸集；它们有有限个顶点；线性规划问题的每个基本可行解都对应可行域的顶点；反之可行域的每个顶点也对应着线性规划问题的基本可行解；线性规划问题的最优解必在可行域的某个顶点达到。

1.4 线性规划的枚举法

因为线性规划的基本可行解是有限的，它不超过C_n^m个，因此采取“枚举法”找出所有基本可行解，然后一一代入目标函数，进行比较，使目标函数取得最大值的基本可行解就是线性规划得最优解。

例 1.9 用枚举法求解线性规划：

$$\begin{array}{l}\max\ f(x)=6x_1+7x_2\\ s.t\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=12\\ 2x_1+x_2+x_4=8\\ x_j\geq 0(j=1,2,3,4)\end{cases}\end{array}$$

的最优解

解：由例 1.8 知，该线性规划的基本可行解为：

$X_1=(0,0,12,8)^T, X_2=(0,4,0,4)^T, X_3=(3,2,0,0)^T, X_4=(4,0,4,0)^T$，相应得代入目标函数得：

$f(X_1)=0, f\left(X_2\right)=28, f\left(X_3\right)=32, f\left(X_4\right)=24$ 所以，$\max\ f(x)=f\left(X_3\right)=32$ 故线性规划的最优解为：

$$X^*=X_3=(3,2,0,0)^T。$$

1.5 线性规划的图解法

图解法是采用直角坐标系及其基本原理设计出的一种求解方法，所以该方法仅适用于二维或三维的线性规划求解，其步骤如下：

第一步：平面坐标系中，给出各约束条件的图形，并确定出可行域。

第二步：在可行域内做出目标函数的某一图形（直线），并将该直线沿目标函数取优（大或小）的方向平行移动，最后相触的顶点（极点）为最优点。

第三步：联立通过最优点的方程得出最优解。

第四步：将最优解代入目标函数得出最优值。

现举例说明：

例 1.10 用图解求线性规划

$$\begin{array}{l}\max\ f(x)=6x_1+7x_2\\ s.t\begin{cases}2x_1+3x_2\leq 12\\ 2x_1+x_2\leq 8\\ x_j\geq 0(j=1,2)\end{cases}\end{array}$$

解 ：第一步：确定可行域。

（1）做出 $2x_1+3x_2=12$ 的直线。

（2）定出 $2x_1+3x_2\leq 12$ 的区域，满足该不等式的点在（1）做出直线的左下方。

（3）做出 $2x_1+x_2=8$ 的直线。

（4）定出 $2x_1+x_2\leq 8$ 的区域。在（2）做出的直线的左下方。

（5）由 $x_1,x_2\geq 0$，知可行域在第一象限，归纳以上得出可行域如图 1-2 所示。

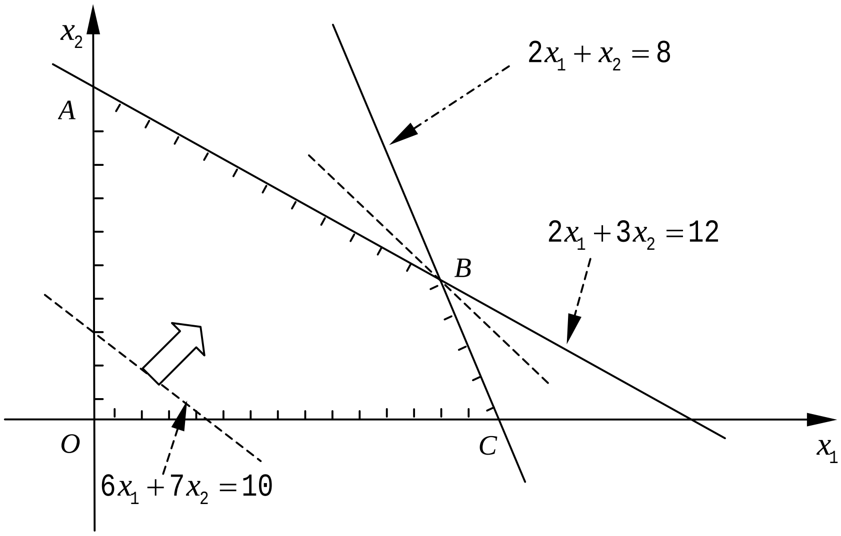


图 1-2

图中可行域为凸多边形$OABCO$，即在该凸边形上的任意点对应一个可行解，反之一个可行解必有多边形上的一点与之对应。

第二步：由于目标函数$f(x)=6x_1+7x_2$是以斜率为 $-\dfrac{6}{7}$ 的平行族，所以我们一旦给$f(x)$赋一个值就确定了一条直线，所以，令$f(x)=10$，即$6x_1+7x_2=10$，并在可行移动，最后与可行域相融的顶点为B点，即该规划的最优点为B。

第三步：联立通过点B的直线方程

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=8 \\ 2x_1+3x_2=12 \end{cases}$$

得B点坐标$(3,2)^T$，即最优解$X^*=(3,2)^T$

第四步：将X^*代入目标函数得出最优值

$\max f(x)=f\left(X^*\right)=32$

极小规划问题的图解法和极大问题的图解法是很雷同的，无外乎将例 1 稍作修改，将原极大问题的目标函数线沿增加方向平行移动改为极小问题为：沿目标函数减少方向平行移动。

例 1.11 利用图解法求解线性规划

$$\begin{cases} \max f(x)=x_1+2x_2 \\ s.t\begin{cases} x_1\le 4 \\ x_2\le 3 \\ x_1+2x_2\le 8 \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

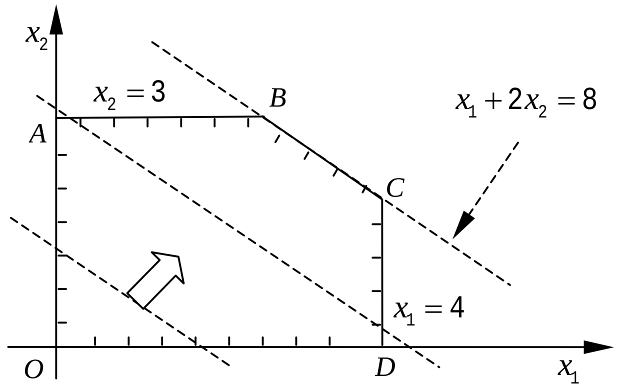


图 1-3

解：得出满足五个不等式的可行域如图 1-3 所示，它是凸多边形$OABCO$。

BC边上每一点的坐标都是最优解（因为平行直线族中，离原点最远的一条直线$x_1+2x_2=8$与BC边重合），因此，最优解有无穷多个，而它们对应的目标函数值都是 8（即最优值等于 8）。

例 1.12 求解线性规划

$$
\begin{cases}
\max\ f(x)=x_1+x_2 \\
s.t\begin{cases} x_1-x_2\geq 1 \\ -x_1+2x_2\leq 0 \\ x_j\geq 0(j=1,2) \end{cases}
\end{cases}
$$

解：因为满足约束条件的点，即图 1-4 种凸多边形$ABCD$为线性规划的可行域，它是无界的，因而可行解集也是无界集合。

当平行直线无限远离原点时，都可以与可行域$ABCD$相交，但无最后相触的顶点，所以目标函数无上界，因而该线性规划无最优解。

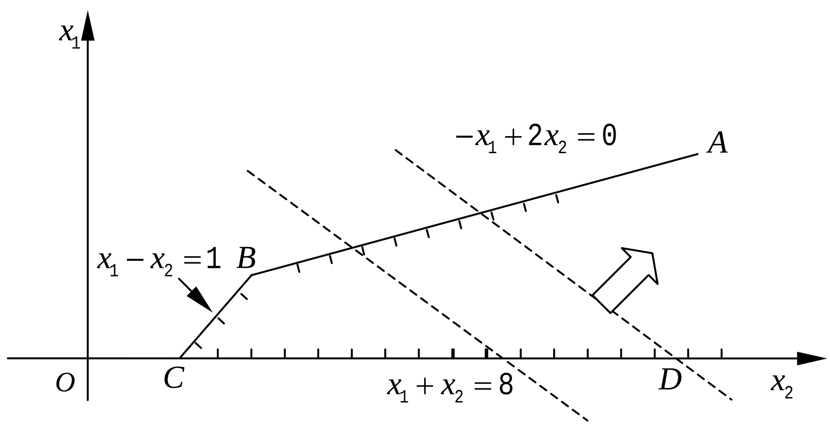


图 1-4

例 1.13 求解线性规划

$$
\left[\begin{array}{l}\min f(x)=x_1+x_2 \\ s.t\begin{cases}-x_1+x_2\ge 1 \\ x_1+x_2\le -2 \\ x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.
$$

解：由图 1-5 可知，同时满足四个不等式的点不存在，所以该线性规划无可行解，即无可行域。当然也就没有最优解了。

从上面的几个只含两个变量的线性规划问题的例子可以看出，线性规划问题可以没有最优解，可以有唯一最优解，还可以有无穷多个最优解。

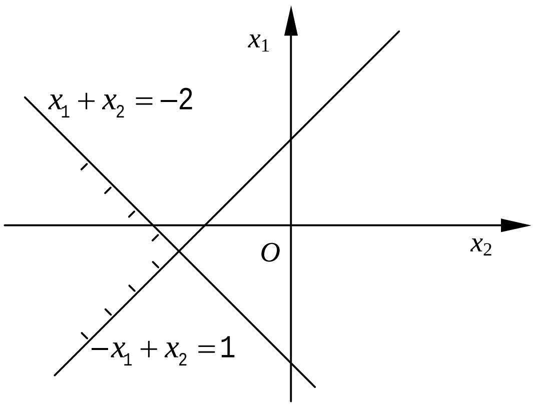


图 1-5

1.6 线性规划的单纯形法

单纯形法是一种在凸集的顶点上搜索最优解的方法。但它不像枚举法要算出所有顶点对应的基本解可行解，而且是由一个初始基本可行解对应的顶点出发，沿着凸集边缘逐个计算与判定所遇到的顶点，直至找到最优解所对应的顶点为止。由此我们将单纯形法，分为两个部分来介绍，一部分是有初始基可行解的单纯形法；另一部分是人造初始基的单纯形法。以下我们先来看第一部分。

1.6.1 有初始基的单纯形法

我们首先有假定(L,P)的系数矩阵A中包含一个m阶单位矩阵，即有m个单位列向量，那么这m个单位列向量所对应的基本可行解是一个基本可行解，我们不妨设A的前m列为单位向量，即

$$
A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

也就是说，(L,P) 的约束方程组为

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{1m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

很显然，$X_1 = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^T$ 是 (L,P) 的一个基本可行解，其中，$b_i \geq 0$，我们就从这个初始基本可行解开始单纯形法的迭代（搜索）

第一步：从（1）式解出 $x_1, x_2, \cdots, x_m$

$$即\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2}$$

一般地写为 $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j (i = 1, 2, \cdots, m)$

将(3)代入目标函数 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n$ （3）

$$= c_1(b_1 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{1j}x_j) + c_2(b_2 - \sum_{j=m+1}^{n} a_{2j}x_j) + \cdots + c_m(b_m - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}x_j)$$

$$+ c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{m} c_ib_i + \sum_{j=m+1}^{n}(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{ij})x_j$$

为了方便起见，令 $Z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_ib_i$；$\lambda_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{ij}$

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_ia_{ij};\ \lambda_j = c_j - Z_j$$

则 $f(x) = Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_jx_j$ （4）

由（4）看出，在当前情况下，f 的值还不能改进，关键在于所有 λ_j 的取值，为了方便起见，我们称 λ_j（非变量对应的目标系数）为检验数。

第二步：判别已知的基本可行解是不是最优解

由（4）知，线性规划的最优解判别条件为：

若所有检验数 λ_j 均非正，即 $\lambda_j \leq 0$ 时，所对应的基本可行解为最优解。

事实上，对于任意的可行解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，由（4）有关系式

$$f = Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_jx_j$$

因为，$x_j \geq 0, \lambda_j \leq 0$，故 $\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j x_j \leq 0$ ，从而 $f \leq Z_0$ 即是说，当 $\lambda_j \leq 0$ 时，无论怎样变化 x_j 的值，f 值也不会增加，故 Z_0 是目标函数 $f(x)$ 的最大值（$\max f = Z_0$）。

显然，当全体检验数 $\lambda_j \leq 0$ 时，对应的基本可行解释线性规划的唯一最优解。

第三步：判别 (L,P) 是否无最优解。

线性规划无最优解的判别条件为：

如果存在一个检验数 $\lambda_{m+K} > 0$，且 $a_{im+K} \leq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则线性规划 (L,P) 无最优解。

事实上，由（3）$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j (i = 1, 2, \cdots, m)$ 令 $x_{m+K} = S > 0, x_j = 0 (j = m+1, \cdots, n, j \neq m+k)$，则有

$$x_i = b_i - a_{im+K} S (i = 1, 2, \cdots, m)$$

因为，$b_i \geq 0, S > 0, a_{im+K} \leq 0$，即对任意正数 S

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 都是可行解，相对应该解的目标函数值为：

$$f = Z_0 + \lambda_{m+K} \bullet S$$

故当 S 无限增大时，f 就无限变大，可见 f 无最大值，即线性规划 (L,P) 无最优解。

例 1.14

$$\begin{cases} \max f(x) = x_1 + x_2 \\ s.t \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2) \end{cases} \end{cases}$$

它的标准形式的线性规划为：

$$\begin{cases} \max f(x) = x_1 + x_2 \\ s.t \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_4 = 16 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \end{cases}$$

而标准线性规划的增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

显然，在点（0，0）处，即基本可行解 $X = (0, 0, 6, 16)^T$ 的非基变量 x_1 对应的目标系数 $c_1 - Z_1 = \lambda_1 = +1 > 0$，且 $a_{i1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} < 0$ ，则该规划无最优解。

从图 1-6 上看也是如此。

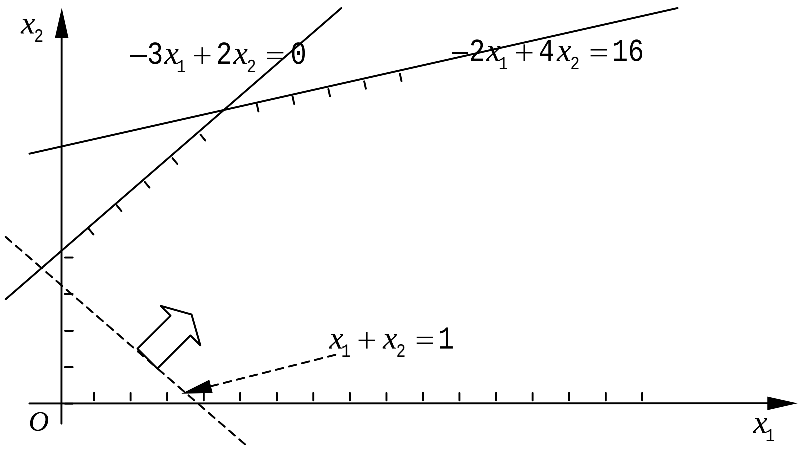


图 1-6

如果一个基本可行解既不是最优解，又不能肯定线性规划无最优解，则我们应该继续搜索使目标函数上升的另一个基本可行解，由线性代数知，要寻找另一个基本可行解的方法应该是从原基变量中引出一个变量，而让原非基变量的一个变量为基变量，那么，应该引进哪一个非基变量，而又引出哪一个非基变量呢？以下我们进行第四步。

第四步：确定λ、出基变量

（1）由（4）式知$\lambda_j>0$越大，函数值上升的可能性越大，所以我们选最大的λ_k，所对的非基变量x_k为入基变量。

即，取$\lambda_k=\max\{\lambda_j>0\big|j=m+1,\cdots,n\}$对应的变量$x_k$为入基变量。

（2）出基变量的确定方法

取$\theta_{i^*}=\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ik}}\Big|a_{ik}>0,i=1,2,\cdots,i^*\in i\right\}$所对应的$i^*$行的基变量$x_{i^*}$为出基变量。事实上，因为$x_i=b_i-\sum\limits_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j=b_i-a_{im+1}x_{m+1}-\cdots-a_{iK}x_K-\cdots-a_{in}x_n\geq0$又因为，$x_K$为$\lambda$基变量，

$\therefore 0<x_K<+\infty$，其中非基变量仍取值为零。

所以，$b_i-a_{iK}x_K=x_i\geq0$即$0\leq x_K\leq\dfrac{b_i}{a_{iK}}=\theta_i$又因为$b_i\geq0$，$x_K\geq0$，所以$a_{iK}>0$。

故$\theta_{i^*}=\min\left\{\theta_i\big|i=1,2,\cdots,m\right\}=\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{iK}}\Big|a_{iK}>0\right\}$。

若有多于一个θ_{i^*}时，则选最上行θ_{i^*}对应的变量出基。

第五步：约束方程组得初等变换（旋转运算）

约束方程组得初等变换是利用线性代数的知识对增广矩阵施行初等变换。即对我们的问题来说是对（1）式对应的增广矩阵施行变换：

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_i & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & x_n & b \\ 1 & & & & a_{1m+1} & \cdots & a_{1k} & a_{1n} & b_1 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & a_{i^*m+1} & \cdots & a_{i^*k} & a_{i^*n} & b_{i^*} \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & a_{mm+1} & \cdots & a_{mk} & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

$$P_i^* \underset{出基}{\overset{入基}{\rightleftharpoons}} P_k$$

为了得到新的基本可行解，要将向量 P_k 变为单位向量，则由线性代数知要作两步工作：

1. 将主元（出基与入基变量的交叉元：a_{i^*K}）变为 1，即将原 i^* 行的元素变为：

$$(0,\cdots,\frac{1}{a_{i^*K}},\cdots,\frac{a_{i^*m+1}}{a_{i^*K}},\cdots 1,\cdots,\frac{a_{i^*n}}{a_{i^*K}},\frac{b_{i^*}}{a_{i^*K}}，利用公式：a'_{i^*j}=\frac{a_{i^*j}}{a_{i^*K}}\ (j=1,2,\cdots,n+1)$$

2. 将主元所在列上的其它元素变为零，即利用矩阵的初等变换，给 i^* 行乘一个适当的数字加在其它 $m-1$ 行上，且使 $a_{iK}(i=1,2,\cdots,m,i^*\neq i)$ 变为零。采用公式：

$$\begin{cases} a'_{ij}=a_{ij}-a'_{i^*j}\bullet a_{iK} \\ a'_{i^*j}=\dfrac{a_{i^*j}}{a_{i^*K}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b'_i=b_i-b'_{i^*}\bullet b_i \\ b'_{i^*}=\dfrac{b_{i^*}}{a_{i^*K}} \end{cases}$$

经过以上初等变换的新增广矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_K & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_i^* & \cdots & x_n & \\ 1 & \cdots & -\dfrac{a_{i^*K}}{a_{i^*K}} & \cdots & 0 & a'_{m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & b'_{i^*} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{i^*K}} & \cdots & 0 & a'_{i^*m+1} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{i^*n} & b'_{i^*} \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mK}}{a_{i^*K}} & \cdots & 1 & a'_{mm+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$$

并得改进后的基本可行解 $X_1=(b'_1 b'_2\cdots b'_{i^*}\cdots b'_m 0\cdots 0)^T$

由此看来，通过以上五步，我们可以得出线性规划的最优解或判别出它无最优解，但要利用矩阵进行迭代，过程就显得的有些凌乱，因此，将以上过程归纳到表上来做。

1.6.2 有初始基的单纯形表法

利用单纯形表法求解线性规划

$$
\max f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n
$$

$$
s.t\begin{cases}x_1+a_{1m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ x_2+a_{2m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m+a_{mm+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_j\ge 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}
$$

的步骤为：

1. 建立初始单纯形表

表 1-5 的填写方法是：表的最上面一行是目标函数 $f(x)$ 的系数 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$，最左边第 1 列 C_B 为基变量所对应的目标系数；第二列 x_B 为基变量列；最后一列 $\theta_i=\left\{\frac{b_i}{a_{iK}}\middle|a_{iK}>0\right\}$；倒数第二列 b_i 为约束条件的常数列；中间为约束条件的系数矩阵 A；

倒数第二行 $Z_j=\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$ ；$Z_0=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i(i=1,2,\cdots,m)$ ；最末行为检验数行 $\lambda_j=c_j-z_j$。

初始单纯形表　　表 1-5

c_j		c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	b_i	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n		
c_1	x_1	1	0	$\cdots$	0	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	
c_2	x_2	0	1	$\cdots$	0	a_{2m+1}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
c_m	x_m	0	0	$\cdots$	1	a_{mm+1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	
z_j									z_0	
$\lambda_j=c_j-z_j$										

2. 检查单纯形表的 c_j-z_j 行，若所有 $\lambda_j\le 0$，则表中所列基变量取对应常数列的值，其余变量（非基变量）取零值，所得的基本可行解 $X=(b_1,b_2,\cdots,b_m,0\cdots0)^T$ 为最优解，Z_0 为 (L,P) 的最大值，否则，若存在 $\lambda_j>0$，则转下一步。

3．选出 $\lambda_K=\max\left\{\lambda_j\middle|\lambda_j>0\right\}$；计算 $\theta_i=\left\{\frac{b_i}{a_{iK}}\middle|a_{iK}>0\right\}$ 填入最后一列并选出其中最小者 θ_{i^*}，认定 i^* 行的基变量 x_i 为出基变量， x_K 为入基变量。

4. 做出改进基本可行解对应的单纯形表。

a.在 x_B 列以入基变量 x_K 替换出基变量。

b.利用矩阵的初等变换将 K 列及 i^* 行的交叉元（主元） a_{i^*K} 变为 1，将主元所在列上的其它元素变为零。这样就得到一个改进了基本可行解对应的单纯形表，于是我们经过有限次的重复 2，3，4 步，便可得到 (L,P) 的最优解或判定无解。

例 1.15 利用单纯形法求解下列线性规划问题：

$$
\begin{cases}
\max\ f(x)=6x_1+7x_2 \\
s.t\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 12 \\ 2x_1+x_2\le 8 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

解：①首先将线性规划转化为标准形式的线性规划问题：

$$
\begin{cases}
\max\ f(x)=6x_1+7x_2+0x_3+0x_4 \\
s.t\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=12 \\ 2x_1+x_2+x_4=8 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

②建立单纯形表求解

初始单纯形　　　　表 1-6

c_j		6	7	0	0	b_i	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	2	$\boxed{3}$	1	0	12	4 ←
0	x_4	2	1	0	1	8	8
z_j		0	0	0	0	0	
$\lambda_j = c_j - z_j$		6	7 ↑	0	0		

因为，$\lambda_1=6>0,\lambda_2=7>0$，$\max\{\lambda_1,\lambda_2\}=\max\{6,7\}=7$ 所以，x_2 为入基变量，故在 x_2 所在列的下方画一个箭头。

又因为：$\theta_1=\frac{12}{3}=4,\theta_2=\frac{8}{1}=8,\min\left\{\frac{12}{8},\frac{8}{1}\right\}=4=\theta_1$，故 θ_1 对应行的基变量 x_3 为出基变量，在 x_3 所在行的右侧，画一个箭头，两箭头所指交叉元 $a_{12}=3$ 为主元，以下再作改进基本可行解的单纯形表或称为第二单纯形表。

第二单纯形表　　　　表 1-7

c_j		6	7	0	0	b_i	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4		
7	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	4	6
0	x_4	$\boxed{\frac{4}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	4	3 ←
z_j		$\frac{14}{3}$	7	$\frac{7}{3}$	0	28	
$\lambda_j = c_j - z_j$		$\frac{4}{3}$ ↑	0	$-\frac{7}{3}$0	0		

表 1-7 的填法是：

a. 以入基变量 x_2 替换出基变量 x_3，且以 7 换零。

b. 将主元变为 1，即初始表的第一行元素各除以 3，得表 1-7 的第一行。

c. 将主元所在列上的元素 1 变为零，即由第二表的第一行乘以-1 加到初始表的第二行对应的元素上，得第二表的第二行。

d. 计算 λ_j,θ_i，确定入基、出基变量的方法与第一表一样。仿照第二表的方法的第三单纯形表 1-8

第三单纯形表　　表 1-8

c_j		6	7	0	0	b_i	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4		
7	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	
6	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	
z_j		6	7	2	1	32	
$\lambda_j=c_j-z_j$		0	0	-2	-1		

因为，所有 $\lambda_j = c_j - z_j < 0\,(j = 3,4)$

所以，第三表所对应的基本可行解 $X^* = (3,2,0,0)^T$ 是线性规划：

$$\begin{cases}\max z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ s.t\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_j \ge 0\,(j = 1,2,3,4)\end{cases}\end{cases}$$

的最优解。

最大值：$\max z = z(X^*) = 32$。

故 $X^* = (3,2)^T$ 是线性规划

$$\begin{cases}\max f(x) = 6x_1 + 7x_2 \\ s.t\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}\end{cases}$$

的最优解，并且 $\max f(x^*) = 32$。

有以上单纯形表可以看出，三张表有一些地方是重复的，故此我们可以将三张表归为一张表，这样我们就可减去一些重复的书写，另外一张表，也易施行变换。例如，例 1 的三张表可归纳为表 1-9 一张表。

其中，段 1，2，3 代表第一、二、三表。

表 1-9

段	c_j		6	7	0	0	b_i	θ_i
	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	0	x_3	2	$\boxed{3}$	1	0	12	4 ←
	0	x_4	2	1	0	1	8	8
	z_j		0	0	0	0	0	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		6	7 ↑	0	0		
2	7	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	4	6
	0	x_4	$\boxed{\frac{4}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	4	3 ←
	z_j		$\frac{14}{3}$	7	$\frac{7}{3}$	0	28	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		$\frac{4}{3}$ ↑	0	$-\frac{7}{3}$ 0	0		
3	7	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	
	6	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	
	z_j		6	7	2	1	32	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	0	-2	-1		

例 1.16 利用单纯形法求解线性规划

$$
\begin{cases}
\min f(x) = x_2 - x_1 \\
s.t \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}
\end{cases}
$$

解：标准化：

$$
\begin{cases}
\min f(x) = x_1 - x_2 \\
s.t \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}
\end{cases}
$$

表 1-10

段	c_j		1	-1	0	0	0	b_i	θ_i
	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	x_3	-2	1	1	0	0	2	-
	0	x_4	$\boxed{1}$	-2	0	1	0	2	2 ←
	0	x_5	1	1	0	0	1	5	5
	z_j		0	0	0	0	0	0	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		1 ↑	-1	0	0	0		
2	0	x_3	0	-3	1	2	0	6	-
	1	x_1	1	-2	0	1	0	2	-
	0	x_5	0	$\boxed{3}$	0	-1	1	3	1 ←
	z_j		1	-2	0	1	0	2	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	1 ↑	0	-1	0		
3	0	x_3	0	0	1	1	1	9	
	1	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4	
	-1	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	
	z_j		1	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$		

因为，所有检验数 $c_j - z_j = \lambda_j \leq 0$，所以，由最优解的判别方法知，第三段对应的单纯形表的基本可行解为最优解，即，最优解 $X^* =$（4，1，9，0，0）^{T}；最优值 $f(X^*)=-3$。

以下举一个最优解不存在的例子。

例 1.17 求解线性规划

$$
\left[\begin{aligned}
&\max f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\
&s.t \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \cdots, 6) \end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

线性规划（Ⅰ）的求解过程及结果如单纯形表 1-11 所示。

表 1-11

段	c_j		-1	2	-1	0	0	0		
	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
1	0	x_4	3	-1	1	1	0	0	4	
	0	x_5	1	-1	1	0	1	0	2	
	0	x_6	-2	$\boxed{1}$	-1	0	0	1	4	4 ←
	z_j		0	0	0	0	0	0	0	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		-1	2	-1	0	0	0		
2	0	x_4	$\boxed{1}$	↑ 0	0	1	0	1	8	6 ←
	0	x_5	-1	0	0	0	1	1	6	
	2	x_2	-2	1	-1	0	0	1	4	
	z_j		-4	2	2	0	0	-2	8	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		3	0	-3	0	0	2		
3	1	x_1	↑ 1	0	0	1	0	0	1	
	0	x_5	0	0	0	1	1	2	14	
	2	x_2	0	1	-1	2	0	3	20	
	z_j		-1	2	-2	3	0	5	32	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	0	1	-3	0	-5		

因为，$\lambda_3 = 1 > 0$, 且 $a_{i3} \le 0$，故所求线性规划无最优解。

1.7 人造初始基的单纯形法

1.7.1 两阶段法

对 (L,P) 用单纯形法求解，要从一个基可行解开始迭代，这个初始基可行解，有时可直接观察得到，例如在约束条件为

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

的情形，可选松弛变量为基变量得出一个初始基可行解。但是，在一般的情况下，初始基可行解并不总是很明显的，因此，有必要给出寻求初始基可行解的一般方法。

另外在某些约束下，问题并不存在可行解，例如：

$$\max f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$s\bullet t\begin{cases}-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

它的全部基本解为：$X^1 = (-\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 0)^T$ ；$X^2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{7})^T$ ；$X^3 = (0, -1, 1)^T$

他们都不是可行解，即是说，问题无基本可行解。当变量个数与方程个数都很多时，我们不能把问题的所有基本可行解都求出来。这时，我们有没有一个判断其基可行解不存在的方法？

我们不妨设

$$A = \begin{pmatrix} D & It \\ H & O \end{pmatrix}$$

其中 It 为一个 t 阶单位矩阵，$0 \leq t \leq m$ ；

D 为 $t \times (n-t)$ 阶矩阵；

H 为 $(m-t) \times (n-t)$ 阶矩阵。

这时方程组 $AX = b$ 可写成：

$$\begin{pmatrix} D & It \\ H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_N \\ X_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_D \\ b_H \end{pmatrix}$$

其中，$X_N = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})^T, X_H = (x_{n-t+1}, \cdots, x_n)^T$

$$b_D = (b_1, b_2, \cdots, b_t)^T, b_H = (b_{t+1}, \cdots, b_m)^T$$

即
$$\begin{aligned} &DX_N + X_N = b_D \\ &HX_N = b_H \end{aligned}$$

考虑如下的一个线性规划问题：

$$(L,P)_1 \quad \begin{cases} \min z = JX_a \\ s\bullet t\begin{cases} DX_N + X_H = b_D \\ HX_N + X_a = b_H \\ X_N, X_H, X_a \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

其中，$X_a = (x_{n+1}, \cdots, x_{n+m-1})^T, J = (1, \cdots, 1)$ 为 $(m-t)$ 为行向量

$(L,P)_1$ 称为 (L,P) 的第一阶段问题，变量 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m-1}$ 称为人工变量，把 (L,P) ，用方

程写出来就是：

$$\begin{cases}\min z = x_{n-t+1} + \cdots + x_{n+m-t} \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n-t}x_{n-t} + x_{n-t+1} = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{t1}x_1 + \cdots + a_{tn-t}x_{n-t} + x_n = b_t \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn-t}x_{n-t} + x_{n+m} = b_m \\ x_j \ge 0 (j = 1, 2, \cdots, n+m-1)\end{cases}$$

我们可以看到(L,P)有一个明显的初始基可行解

$$X^0 = (0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)^T$$

所以可以用单纯形法求解。

$(L,P)_1$是否有最优解？若有，它与(L,P)得解又有什么关系？

定理：$(L,P)_1$必有 q 最优解。设$(L,P)_1$的基本最优解为$X^* = (X_N^*, X_H^*, X_a^*)^T$，若$X_a^* \ne 0$，则$(L,P)$无可行解；若$X_a^* = 0$，则$Z^* = (X_N^*, X_H^*)^T$是$(L,P)$的基可行解。

定理说明，关于(L,P)的初始基可行解可以通过求解$(L,P)_1$而得到，这种寻求(L,P)的初始基可行解的方法称为两阶段 q 法。

[注 1]当得到$(L,P)_1$的最优解$X^* = (X_N^*, X_H^*, X_a^*)^T$时，如果$X_a^* = 0$，但$X_a$得变量不全部为非基变量，为了得到$(L,P)$的基可行解$X^*$在$(L,P)$中的对应基阵，必须继续进行单纯形法迭代，每一次迭代换出一个人工变量，直到人工变量全部成为非基变量为止。

[注 2]当第一阶段最终计算表中满足[注 1]及$X_a^* = 0$时，将目标函数的系数换为原问题的目标系数，并去掉人工变量列，再进行第二阶段的单纯形法求解。

例 1.19 利用两阶段法可求解线性规划

$$\min f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_j \ge 0 (j = 1, 2, 3, 4)\end{cases}$$

解：第一阶段

这里$X_N = (x_1, x_2, x_3)^T$, $X_H = (x_4), b_D = (10), D_H = (15, 20)^T, D = (1, 2, 1),$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, t = 1$，所以引进人工变量$x_5, x_6$作第一个阶段问题

$$(L,P)_1:\begin{cases}\min z = x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_j \geq 0 (j = 1,\cdots,6)\end{cases}$$

选取 x_4, x_5, x_6 为基变量，用单纯形表求解，如表 1-13

表 1-13

	c_j	0	0	0	0	1	1		
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
0	x_4	1	2	1	1	0	0	10	10
1	x_5	1	2	3	0	1	0	15	5
1	x_6	2	1	$\boxed{5}$	0	0	1	20	$4 \leftarrow$
z_j		3	3	8	0	1	1		
$\lambda_j = c_j - z_j$		-3	-3	-8	0	0	0	35	
0	x_4	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\overset{\uparrow}{0}$	1	0	$\frac{1}{5}$	6	
1	x_5	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	3	
0	x_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	4	
z_j		$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	3	
$\lambda_j = c_j - z_j$		$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{5}$		
0	x_4	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$	
0	x_2	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{15}{7}$	
0	x_3	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{25}{7}$	
z_j		0	0	0	0	-1	-1	0	
$\lambda_j = c_j - z_j$		0	0	0	0	1	1		

至此得到$(L,P)_1$的最优解$X^*=(0,\frac{15}{7},\frac{25}{7},\frac{15}{7},0,0)^T$ $\min f=-15$，且$x_5,x_6=0$，基变量中无人工变量，第一阶段结束。得到原问题的初始基可行解$X^0=(0,\frac{15}{7},\frac{25}{7},\frac{15}{7})^T$将第一阶段最终计算表中的人工变量列取消，并将目标函数系数换成原问题的目标函数系数，继续进行迭代，得出第二阶段的单纯形表，如表 1-14。

表 1-14

c_j		-1	-2	-3	1		
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
-1	x_1	1	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{6}$	
-2	x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$	
-3	x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	
z_j		-1	-2	-3	-1	-15	
$\lambda_j=c_j-z_j$		0	0	0	1		

所以，得原问题的最优解，$X^*=(\frac{15}{6},\frac{5}{2},\frac{5}{2},0)^T$，$\min f=-15$。

1.7.2 大M法

大M法是解无初始可行基的另一种单纯形表法。

（1）引入人工变量$x_{n+i}(i=1,2,\cdots,m)$，使原规划(L,P)的约束方程变为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \\ x_j\geq 0(j=1,2,\cdots,n,\cdots,n+m) \end{cases}$$

显然，令$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，得初始基本可行解

$$X^{(*)}=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$$

（2）引入一个充分大的正数M

在（1）中我们为约束方程加入了人工变量后，目标函数应如何改变呢？因为我们的目的是设法寻找(L,P)的最优解，所以，我们希望所加的人工变量最后取值为零，换句话说，就是使所有的人工变量出基，这样就要在目标函数中人工变量前减一个充分大

的正数M。

即，原线性规划(L,P)应转变为线性规划

$$L_M\quad\begin{cases}\max f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n-Mx_{n+1}-\cdots-Mx_{n+m}\\ s\bullet t\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_j\geq 0(j=1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m)\end{cases}\end{cases}$$

[注] a.若经过若干次迭代后，基变量中不再包含人工变量，则原问题L继续按单纯形方法求解。

b.人工变量$x_{n+i}(i=1,2,\cdots,m)$一旦出基，就不再会进基。

c.若L_M的最优解为$X^*=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots0)^T$时，则$(L,P)$的最优解为$X^*=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

d.L_M的解法完全和单纯形方法一样，仅需将M看作为与它比较所有数中最大者。

例 1.20 求解线性规划：

$$\begin{cases}\max f(x)=7x_1+12x_2\\ s\bullet t\begin{cases}9x_1+4x_2=360\\ 4x_1+5x_2+x_3=200\\ 3x_1+10x_2+x_4=300\\ x_j\geq 0(j=1,2,3,4)\end{cases}\end{cases}$$

解：(1) 为了得到一个三阶的单位矩阵，增加一个人工变量x_5，得出下面新线性规划：

$$\max f(x)=7x_1+12x_2-Mx_5$$
$$\begin{cases}9x_1+4x_2+x_5=360\\ 4x_1+5x_2+x_3=200\\ 3x_1+10x_2+x_4=300\\ x_j\geq 0(j=1,2,\cdots5)\end{cases}$$

（2）利用单纯形表法求解 L_M ，求解过程如表 1-14 所示。

段	c_j		7	12	0	0	$-M$		
	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	θ
1	$-M$	x_5	$\boxed{9}$	4	0	0	1	360	40 $\leftarrow$
	0	x_3	4	5	1	0	0	200	50
	0	x_4	3	10	0	1	0	300	100
	z_j		$-9M$	$-4M$	0	0	$-M$		
	$\lambda_j = c_j - z_j$		$7+9M$	$12+4M$	0	0	0		
2	7	x_1	$\uparrow$ 1	$\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$	40	90
	0	x_3	0	$\boxed{\frac{29}{9}}$	1	0	$-\frac{4}{9}$	40	$\frac{360}{29}$ $\leftarrow$
	0	x_4	0	$\frac{78}{9}$	0	1	$-M-\frac{7}{9}$	180	$\frac{810}{29}$
	z_j		7	$\frac{28}{9}$	0	0	$\frac{7}{9}$	280	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	$\frac{80}{9}$	0	0	$-M-\frac{7}{9}$		
3	7	x_1	1	$\uparrow$ 0	$-\frac{4}{29}$	0	$\frac{5}{29}$	$\frac{1000}{29}$	
	12	x_2	0	1	$\frac{9}{29}$	0	$-\frac{4}{29}$	$\frac{360}{29}$	
	0	x_4	0	0	$-\frac{78}{29}$	1	$\frac{25}{29}$	$\frac{2100}{29}$	
	z_j		7	12	$\frac{80}{29}$	0	$\frac{13}{29}$	$\frac{11320}{29}$	
	$\lambda_j = c_j - z_j$		0	0	$-\frac{80}{29}$	0	$-M+\frac{13}{29}$		

因为，全部 $c_j - z_j = \lambda_i \le 0$ ，故第 3 段所对应的基本可行解

$Z^* = (\frac{1000}{29}, \frac{360}{29}, 0, \frac{2100}{29}, 0)^T$ 是 L_M 的最优解，则 (L,P) 的最优解为

$X^* = (\frac{1000}{29}, \frac{360}{29}, 0, \frac{2100}{29})^T$ ，最优值 $\max f(x) = \frac{11320}{29}$ 。