第 4 章　整数规划

4.1　问题的提出

实际中很多问题的优化是用线性规划解决的，除特殊要求，其最优解非负即可，对某些问题，最优解必须加整数要求。例如运货派出的车数，购买机器的台数，分配工作需要的人数等。为整数要求的线性规划，称为整数规划（Integer Programming），简称 IP。IP 的所有变量都要求是整数的，成为全整数规划（All Integer Programming），要求变量非 0 即 1 的，称为 0—1 规划（0—1 Programming），下面就是一个整数规划的例子。

例 4.1　某公司承建一项工程需要大型设备，有两种型号可供选择，若选用第一种类型，需配备司机一人，助手一人，施工一个小时可获利润 20 元，若选用第二种类型，需配备司机一人，助手三人，施工一个小时可获利润 30 元。该公司可驾驶这类大型设备的司机最多只能抽调五人，合适的助手只有六人。为了获得最大利润，应该怎样选用大型设备？

设：选用“ A ”型设备 x_1 台，选用“ B ”型设备 x_2 台，最优化模型为（舍去名数）：

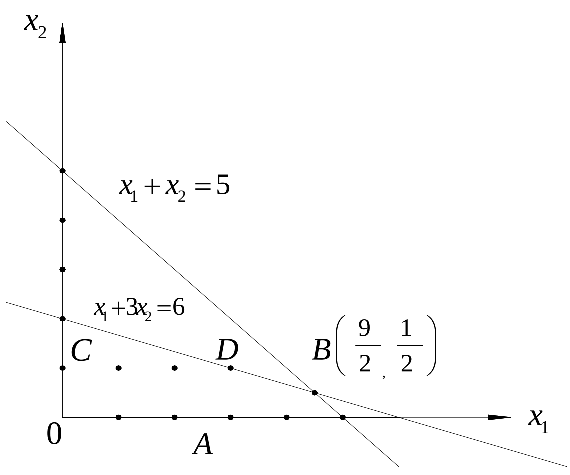

图 4-1

$$\max z = 20x_1 + 30x_2 \qquad (5)$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 & (1) \\ x_1 + 3x_2 \le 6 & (2) \\ x_1, x_2 \ge 0 & (3) \\ x_1, x_2\text{为整数} & (4) \end{cases}$$

对例 1，若去掉整数要求，是一个典型的线性规划问题。其最优解是（图 4-1 的 B

点）：

$$x_1=4\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{2},\max z=105$$

初看起来，这个最优解可以简单地舍入取得整数解，满足整数约束，即 $x_1=5,x_2=1$（或$x_1=4,x_2=0$）由图 4-1 知，它不是可行解，更谈不上最优解，这种方法不可取。

那么，有约束条件(1)、(2)知，为保证解的可行性，必须使 $x_1\le 5,x_2\le 2$，则 x_1 的取值可以是 0，1，2，3，4，5，共计六个，x_2 的取值有 0，1，2，共计三个。所以，该问题的整数解共有 $3\times 6=18$ 个，在它们中找处所有可行解，(由图 4-1，可行域内除 B 点以外的其它 11 个“点”都是整数可行解)，分别代入目标函数，Z 值最大所对应的解，就是 IP 的最优解（D 点 $x_1=3,x_2=1,\max z=90$）。

对于小型问题，变量很少，可行的整数解组合不太多，这种枚举的方法是可行的，也是有效的。对于大型问题，可行的整数解是很多的，不宜采用此方法。例如指派问题，其 n=10 时，指派方案就有 $10!$ 个，超过 300 万，若用枚举法，一开始就失去了优化原则。

4.2　分枝定界法

分枝定界法（Branch and Bound Methed）是由 Land 和 Doig 提出修正的，可用于全部整数规划和部分整数规划。它首先求得相应的 LP 整数解（最优值 z_0），若有变量不合整数约束要求，就任选其一，设 $x_K=b_K^{'}+f_K$（其中为 $b_K^{'}$ 整数，f_K 为小数部分），把原问题（可行域）分为两个分枝，既 $x_K\le b_K^{'}$ 和 $x_K\ge b_K^{'}+1$，然后解分枝问题，若得到满足约束的整数解，解题就到此为止。对极大化问题而言，其最优值 Z' 以 Z^0 为上界。若仍未得到合于整数要求的解，就对分枝继续分解，直到求得最优整数解。

例 4.2　求：

$$\begin{cases}\max Z=2x_1+x_2\\ s.t.\begin{cases}x_1+x_2\le 5\\ -x_1+3x_2\le 0\\ 6x_1+2x_2\le 21\\ x_1,x_2\ge 0,\text{且为整数}\end{cases}\end{cases}$$

不考虑整数约束，解相应 LP 得最优解表（表 4-1）：

表 4-1

C_j			2	1	0	0	0
	基底	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_2	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$
	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$
	x_1	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
$C_j - Z_j$		$7\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$

最优解对应于图 4-2 的 B 点，它不满足整数约束要求，选 x_1，使 $x_1 \le 2$和$x_2 \ge 3$，把可行域 R_1 分为两个部分 $R_{2(1)}$及$R_{2(2)}$，原问题就被分为两个分枝，舍去了 $2 \prec x_1 \prec 3$ 不合整数约束的部分（见图 4-3)，第一个分枝（即 $R_{2(1)}$）增加新约束 $x_1 \le 2$ 为 $\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_5 \le -\frac{3}{4}$ 图中第二分枝（即 $R_{2(2)}$）增加新约束 $x_1 \ge 3$ 为 $-\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \le -\frac{1}{4}$，新约束加入松弛变量 x_6（或 x_7）后，分别列入原问题的最优解表，利用对偶单纯形法，求得最优解：

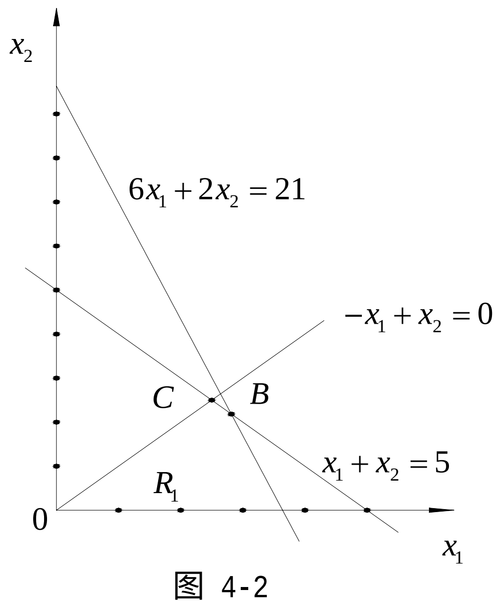

图 4-2

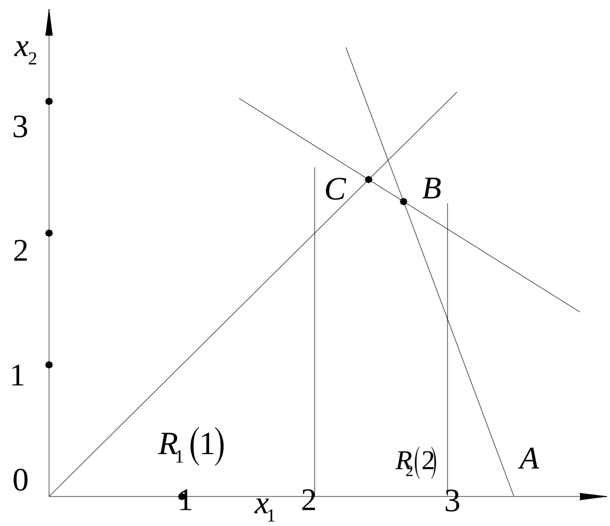

图 4-3

分枝 2(1) （$x_1 \le 2$）	分枝 2(2) （$x_1 \ge 3$）
$\max Z = 6$ $x_1 = 2 \quad (x_3 = 1)$ $x_2 = 2 \quad (x_5 = 5)$	$\max Z = 7\frac{1}{2}$ $x_1 = 3 \quad (x_4 = \frac{1}{2})$ $x_2 = 1\frac{1}{2} \quad (x_4 = 1\frac{1}{2})$

第二分枝 $(2(2))$ 不合整数约束要求，需继续分解。把分枝 $(2(2))$ （即 $R_{2(2)}$ ）分为两部分，即 $x_2 \le 1$,和$x_2 \ge 2$ ，显然， $x_2 \ge 2$ 分枝无可行解， $x_2 \le 1$ 的分枝最优解是：$\max Z = 7\frac{1}{3}, x_1 = 3\frac{1}{6}, x_2 = 1$ 仍不合整数要求。以后的分枝及最优解见分枝树，图 4-4。

分枝树的第四层得到原问题的整数最优解：

$$x_1 = 3, x_2 = 1, \max Z = 7$$

现在回头讨论一下，在分枝 2(1) 得到整数解后，为什么还要对分枝 (2(2)) 继续分解？因为分枝 (2(2)) 的新分枝 (3(1)) ，其最优值（对极大化）的上界是 $7\frac{1}{2}$ ，大于分枝 (2(2)) 的最优值 6，则新分枝 (3(1)) 的最优值有可能大于 6，所以要对分枝 (2(2)) 继续分解。事实上，分枝树已经给出答案。假设分枝 (2(2)) 的值不是 $7\frac{1}{2}$ ，而是 6 或者更小，则新分枝的最优值决不会大于 6，那么就要舍去分枝 (2(2)) ，不再对其进行分解工作。

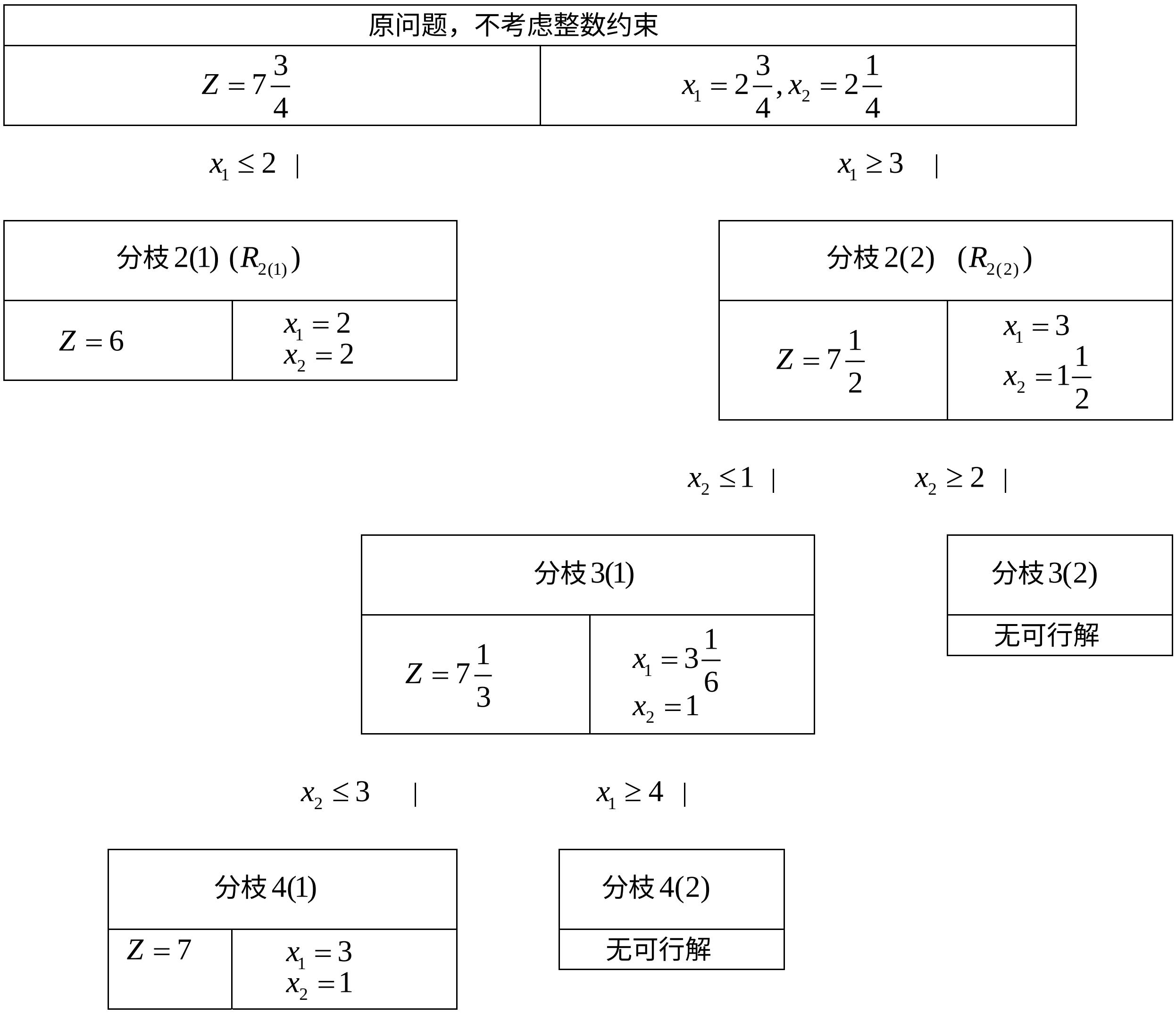

图 4-4　分枝树

4.3　割平面法

割平面法（又称 Gomory 法）的基本思想，是新增加一些线性（不等式）约束条件，称为割平面，去“切割”相应的 LP 可行域，并使切掉部分都是非整数解，所有整数解被保留下来。当这种割平面足够多时，使相应的 LP（被保留下来的可行域）和原 IP 具有相同的最优解。那么，相应 LP 的最优解也就是原 IP 的最优解。

4.3.1　全部整数型运算方法

例 4.3

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2$$
$$s.t\begin{cases}2x_1+4x_2\le 13\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2\le 1\frac{1}{6}\\ x_1,x_2\ge 0\\ x_1,x_2\text{为整数}\end{cases}$$

首先，将该问题的限制条件予以整数化，并加松弛变量。

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2 \qquad (5)$$
$$s.t\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3=13 & (1)\\ 2x_1+x_2=7 & (2)\\ x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4 & (3)\\ x_j\text{为整数} & (4)\end{cases}$$

不考虑整数约束（4），用单纯形方法求解相应 LP 得最优解表（见表 4-2）。

表 4-2

C_j			6	4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_2	2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
6	x_1	$2\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
C_j-Z_j			0	0	$-\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$

x_1 不合整数要求，于是找（第一个）割平面（即考虑整数要求），由表得：

$$x_1 = 2\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x_3-\frac{2}{3}x_4 \qquad \text{为整数}$$

使各系数均为正，有：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}x_4$$

是整数，因为所有变量均为整数，则上式至少是一，则有：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{3}x_4\ge 1 \qquad (6)$$

即 $x_3+2x_4\ge 3$

（6）即为切割方程，其通式为： $f_j+\sum_K f_{jK}x_K\ge 1$

其等式形式就是割平面，为了在图上表示，由约束（1）、（2）可以把（6）变为

$$x_1+x_2\le 4 \qquad (7)$$

（7）是切割方程的另一种表现形式，割平面就表示为：$x_1+x_2=4$

它就是图 4-5 所表示的 EF 直线。直观地看，它割去了（除 EF 直线上的所有点）ΔEFB 部分：$x_1+x_2>4$

其中不含整数（坐标）点。留下部分是：$x_1+x_2\le 4$

即多边形$OAEFC$，从图 4-5 看，所有整数（坐标）点都保留下来了。

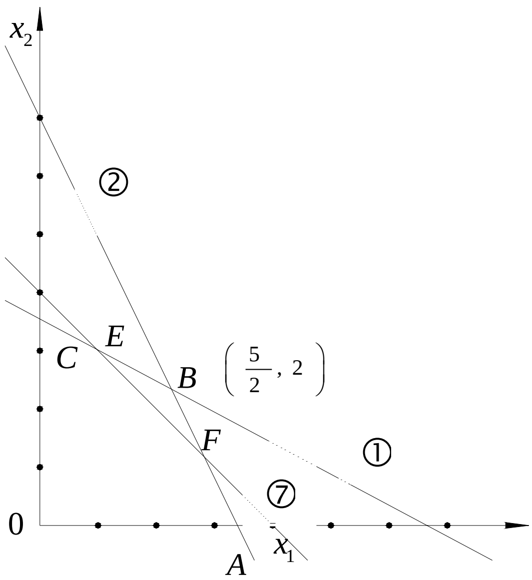

图 4-5

把切割方程作为新约束条件加入原问题，变为：

$$\begin{cases}\max Z=6x_1+4x_2\\ s.t\begin{cases}2x_1+4x_2\le 13\\ 2x_1+x_2\le 7\\ x_1+x_2\le 4\\ x_1,x_2\ge 0\\ x_1,x_2\text{为整数}\end{cases}\end{cases}$$

按上述步骤，解相应 LP 得最优解：$x_1=3,x_2=1$，$x_3=3,x_4=x_5=0,\max Z=22$。

实际上就是 F 点。因为它已经满足整数约束，所以就是原 IP 的最优解。

割平面方程的另一种表达方法也是常用的，再经此法求解例 3：

由表 4-2 知，x_1不满足整数约束，则

$$x_1-\frac{1}{6}x_3+\frac{2}{3}x_4=2\frac{1}{2}\qquad \text{变为}$$

$$(1+0)x_1-\left(1-\frac{5}{6}\right)x_3+\left(0+\frac{2}{3}\right)x_4=2+\frac{1}{2}$$

移项：$$x_1-x_3-2=\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{6}x_3+\frac{2}{3}x_4\right)$$

因为要求所有变量均为整数，则

$x_1 - x_3 - 2$ 为整数，

$\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right)$亦为整数，

又 $\frac{5}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4$ 为整数，所以有：

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right) \le 0$$

即 $-\frac{5}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \le \frac{1}{2}$ （8）

此即所求之切割方程，切割平面是： $\frac{5}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \ge \frac{1}{2}$

（8）加入松弛变量 x_5 作为新约束条件，并入最优解表 4-3，得

表 4-3

C_j			6	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_2	2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	0
6	x_1	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{4}{5}$	0
0	x_5	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	1
$C_j - Z_j$			0	0	$-\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	0

由表 4-3 知，此不是可行解，需用对偶单纯形法继续求解。x_5 为出基变量，由下式确定进基变量为 x_3 ：

$$\theta = \min_j \left(\frac{C_j - Z_j}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0\right) = \min_j \left(\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{6}}, -\frac{2\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \min_j \left(\frac{6}{15}, 4\right) = \frac{6}{15}$$

再按原单纯形法计算，得表 4-4

表 4-4

C_j			6	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_2	$1\frac{4}{5}$	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
6	x_1	$2\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$
C_j-Z_j			0	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{2}{5}$

由表 4-4 知，基变量均为非整数，需找新的切割方程，取b_i列中纯分数值（部分）最大的（x_2）得：$x_2-\frac{3}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5=1\frac{2}{5}$ 即：$x_2-x_4-1=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5\right)$等式两端均为整数，且要求$x_j$都为整数，所以$\frac{2}{5}x_4+\frac{2}{5}x_5$为整数，则有

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}x_4-\frac{2}{5}x_5\le 0 \qquad (9)$$

即为新的切割方程。新的切割平面是：$-\frac{2}{5}x_4-\frac{2}{5}x_5=-\frac{4}{5}$ 把（9）加入松弛变量x_6，作为新的约束条件，加入表 4-4 得：

表 4-5

C_j			6	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_2	$1\frac{4}{5}$	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
6	x_1	$2\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
0	x_3	$\frac{3}{5}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	0
0	x_6	$-\frac{4}{5}$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1
C_j-Z_j			0	0	0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0

由表 4-5 知，所得为非可行解，按前面的办法，确定x_6出基，x_5进基，继续按原单纯形法进行迭代，得：

表 4-6

C_j			6	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_2	1	0	1	0	-1	0	1
6	x_1	3	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	x_3	3	0	0	1	2	0	-3
0	x_5	2	0	0	0	1	1	$-\frac{5}{2}$
$C_j - Z_j$		(22)	0	0	0	-2	0	-1

检验数均为负，基变量均为正整数，所得为最优解，即为 IP 最优解，

$$\max Z = 22, \qquad X^* = (3,1,3,0,2,0)$$

为了便于学习，把割平面法步骤小结于下：

1.把整数规划约束不等式的变量系数 a_{ij} 和常量 b_i 全部整数化，然后加入松弛变量，且暂不考虑整数约束条件，用单纯形法解相应线性规划得到最优解；

2.求割平面：

2.1 设 x_i 为相应线性规划最优解中有分数值的一个变量，并且真分数部分是最大的，以非基变量表示为：

$$x_i = b_i + \sum_k b_{ik} x_k \tag{1}$$

其中： $i \in B \quad (B\text{是基变量下标集合})$
$k \in K \quad (K\text{是非基变量下标集合})$

2.2 将 b_i 和 b_{ik} 都分解成整数部分 N 和非整数部分 f 之和，（N 不大于的 b 最大整数）：

$$b_i = N_i + f_i \qquad \text{这里} 0 < f_i < 1$$
$$b_{ik} = N_{ik} + f_{ik} \qquad \text{这里} 0 < f_{ik} < 1$$

例如： $b = 2\frac{1}{2}, \text{则} N = 2, f = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{1}{6}, \text{则} N = -1, f = \frac{5}{6}$

于是 x_i 表示为：

$$x_i = N + \sum_k N_{ik} x_k + f_i + \sum_k f_{ik} x_k \tag{2}$$

则： $$x_i - N - \sum_k N_{ik} x_k = f_i + \sum_k f_{ik} x_k \quad (3)$$

（3）式左、右两端均为整数，于是：

（3）根据（2）必有： $$f_i + \sum_k f_{ik} x_k \geq 1 \quad (4)$$

（4）既为切割方程，切割平面是：$f_i + \sum_k f_{ik} x_k = 1$

它把相应的线性规划可行域分为两个部分，其一：$f_i + \sum_k f_{ik} x_k < 1$就是被切割掉的部分，其中不包含整数（坐标）点。

3.把切割方程（4）作为新约束条件，并入相应线性规划最优单纯形表，用对偶单纯形法调整基变量，然后按原单纯形法继续迭代得到最优解。若其符合整数约束要求，计算停止，所得的最优解，就是原整数规划的最优解。若所得最优解不满足整数约束要求，则重复（2）、（3）步骤，直到取得整数最优解为止。

4.3.2　部分整数型规划的割平面法

一部分变量为整数，另一部分变量不必取整数，称为部分（或混合）整数规划，解法和全部整数型割平面法所不同的只是加放限制条件——割平面有差异。就是所得相应线性规划最优解，如果整数变量未被满足，则增加下面指出的限制条件后，再继续迭代，直到满足要求。

新限制条件（即割平面）为：

$$x_{n+m+i} = -f_{i0} + \sum_i f_{ij}^* x_j$$

其中：x_{n+m+i}——新增约束的松弛（不足）变量。

f_{i0}——未被满足的整数要求（x_i）行之常数项b_i的非负分数。

f_{ij}^*——新增约束条件的变量相应系数，依下列规则求得。

$$f_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}; \text{当} a_{ij} \geq 0\text{，且} x_j \text{为非负整数变量} \\ \dfrac{f_{i0}}{1-f_{i0}}(-a_{ij})\text{；} \quad \text{当} a_{ij} < 0\text{，且} x_j \text{为非负整数变量} \\ f_{ij}\text{；} \quad \text{当} f_{ij} < f_{i0}\text{，且} x_j \text{为非负整数变量} \\ \dfrac{f_{i0}}{1-f_{i0}}(1-f_{ij})\text{；} \quad \text{当} f_{ij} > f_{i0}\text{，且} x_j \text{为非负整数变量} \end{cases}$$

这里：a_{ij}——相应项的常系数（未被满足要求的x_i行的）。

f_{ij}——为整数变量相应项常系数的非负分数。

例 4.4　求解：

$$\begin{cases}\max Z = 10x_1 + 8x_2 + \frac{19}{8}x_3 - 11x_4 \\ s.t\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \le \frac{31}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \le \frac{9}{4} \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3,4 \\ x_1, x_2, x_3 \text{为整数} \end{cases}\end{cases}$$

解相应线性规划，得最优解表：

表 4-7

C_j			10	8	$\frac{19}{8}$	-11	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	20	0	2	1	-1	1	2
10	x_1	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	0	2
$C_j - Z_j$			0	$-\frac{19}{2}$	$-\frac{1}{8}$	-1	0	-20

由表 4-7 知，x_1 不满足整数要求，求加入新约束，因为 $f_{i0} = \frac{1}{2}$

$$a_{11} = 1(f_{11} = 0), a_{12} = \frac{7}{4}(f_{12} = \frac{3}{4}),$$
$$a_{13} = \frac{1}{4}(f_{13} = \frac{1}{4})$$

对整数变量部分，

$$\because \ f_{11} = 0 < f_{10} \qquad \therefore \ f_{11}^* = 0$$

$$\because \ f_{12} = \frac{3}{4} > f_{10} \qquad \therefore \ f_{12}^* = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\because \ f_{13} = \frac{1}{4} < f_{10} \qquad \therefore \ f_{13}^* = \frac{1}{4}$$

对于非整数约束变量：

$$a_{11} = -1 < 0 \qquad \therefore \ f_{12}^* = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}(+1) = 1$$

$$a_{15} = 0 \qquad f_{15}^* = 0 \qquad a_{16} = 2 > 0 \qquad f_{16}^* = 2$$

故得新约束（割平面）为：

$$x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 + 2x_6$$

即： $$-\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - x_4 - 2x_6 + x_7 = -\frac{1}{2}$$

加入最优解表 4-7 得：

表 4-8

C_j			10	8	$\frac{19}{8}$	-11	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	20	0	2	1	-1	1	2	0
10	x_1	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	0	2	0
0	x_7	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	0	-2	1
$C_j - Z_j$			0	$-\frac{19}{2}$	$-\frac{1}{8}$	-1	0	-20	0

用对偶单纯形法求解，x_7 出基，x_3 进基得：

表 4-9

C_j			10	8	$\frac{19}{8}$	-11	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	18	0	1	0	-5	1	-6	4
10	x_1	4	1	$\frac{3}{2}$	0	-2	0	0	1
$\frac{19}{8}$	x_3	2	0	1	1	4 –1	0	8	-4
$C_j - Z_j$			0	$-9\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-19	$-\frac{1}{2}$

检验数皆负，最优解

$$X^* = (4, 0, 2, 0, 18, 0)$$

$$\max Z = 44\frac{3}{4}$$

满足整数约束要求。

4.4 0—1（整数）型规划

整数规划中会遇到变量 x_j 取值非 0 即 1 的情况，称这种 0—1 规划（0—1 Programming），这是 x_j 称为 0—1 变量，也称逻辑变量。0—1 规划适用于“是”或“非”的决策。

4.4.1 应用 0—1 变量的决策问题

1.厂址选择问题

经济管理活动中，工厂地址的选择是一项重要而细致的工作，可行性研究和投入产出分析，都是行之有效的方法，若和 0—1 规划配合使用，对解决问题收效更好。

例 4.4 某建设工程，必须新建两个混凝土搅拌站和原有的一个配合工作，才能满足需要，现有三个地点可供建设新搅拌站用，问如何选址最好？假设有关资料如下：

供 需 平 衡 表　　　　表 4-10

搅拌站 \ 工地	1	2	3	日产量（m^3）
1				90
2（拟建）				50
3				50
4				50
日用量（m^3）	30	110	50	

运 距 表　　　　表 4-11

搅拌站 \ 工地	1	2	3
1	3	2	1
2（拟建）	8	5	4
3	2	3	9
4	4	5	4

首先，令 $i(i=1,2,3,4)$ 表示混凝土搅拌站，$j(j=1,2,3)$ 表示需用混凝土的主要工地，x_{ij} 表示第 i 个搅拌站到第 j 个工地的混凝土运量（m^3/日），引入 0—1 变量 y_2,y_3,y_4 分别表示第 2、3、4 个混凝土搅拌站。

根据题意，问题可以归结为：

$$\max Z = 3x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 8x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \\ + 2x_{31} + 3x_{32} + 9x_{33} + 4x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43}$$

$$s.t \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 50y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 50y_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 50y_4 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \ge 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \ge 110 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \ge 50 \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3 \\ y_2 + y_3 + y_4 \ge 2 \\ y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_2, y_3, y_4 = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

2．关于产品成本问题

例 4.6　某厂一种新产品要投产，有几种水平不同的机械化、自动化方案可供选择，究竟选那种方案，是管理部门必须事先决策的。

设 x_j 表示采用第 j 种方案时的产品产量。

F_j 表示采用第 j 种方案时的固定成本。

V 表示单位产品的可变成本（如材料费等)。

那么，采用不同方案时，相应的总成本表示如下：

当采用第 j 种方案时，即 $x_j > 0$，成本是：

$$P_j = \left(\frac{F_j}{x_j} + V\right)x_j = F_j + Vx_j$$

当不采用第 j 种方案时，即 $x_j = 0$，成本是：

$$P_j = 0$$

现在引入 0—1 变量 y_j，并令

$$y_j = \begin{cases} 1, & x_j > 0 \\ 0, & x_j = 0 \end{cases}$$

设 M 为一个相当大的常数，则成本可以表示为：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} (F_j y_j + Vx_j)$$

约束条件：$x_j < y_j M \qquad j = 1, \cdots, n.$

它表示，当 $x_j > 0$ 时，必有 $y_j = 1$，即采用第 j 种方案，成本为 $P_j = F_j + Vx_j$，相应

的目标函数值 Z 也就随之而定了。

3．非此即彼的决策条件

例 4.7 某厂决定生产两种合同产品，有两种加工方法都可以满足要求，由于方法不同，每种产品的消耗和收益也就不同，究竟采用哪种方法加工，需要研究，但只能选择一种方法进行生产。假设有关设备情况如表 4-12 所示，如何把她们统一在一个问题中？

表 4-12

方法 / 产品 / 工序	I		II		每日可使用工时
	A	B	A	B	
d_1	5	4	3	2	12
d_2			1	2	8

首先，令产品的日产量，A 为 x_1 ，B 为 x_2，那么，采用第一种加工方法时，限制条件是：

$$5x_1 + 4x_2 \le 12$$

采用第二种加工方法时，约束为：

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \end{aligned}$$

由于最终只能采用一种方法，引入 0—1 变量 y 和一个充分大的数 M ，

$$y = \begin{cases} 1, & \text{采用方法I} \\ 0, & \text{采用方法II} \end{cases}$$

那么必居其一的方案可由下面约束而定：

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\le 12 + (1-y)M \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 12 + yM \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 + yM \end{aligned}$$

若决策部门确定采用第一种方法进行生产，则 $y=1$，第一种加工方法的限制条件就是原来的

$$5x_1 + 4x_2 \le 12$$

这是，第二种方法的不等式约束右侧都增加了一个充分大的数 M ，成为多余的限制，失去了作用。反之，采用第二种方法时，$y=0$，第一个约束的右侧多了一个 M ，成为多余的限制。这样使不同时被采用的限制条件，被统一在一个问题之中了。

4.5 指派问题

管理工作中会遇到这种情况：有 n 项任务，必须由 n 个人或 n 台机器完成其中一项，由于工作性质和每个人技术专长不同，使每个人做不同工作时效率（单位时间内完成的工作量）就有差异。怎样作出最优决策，以使人尽其才，经济效益最佳？这是管理工作中不可避免的问题。这类问题称为指派问题（Assignment Problem），是 0—1 规划和运输问题的特殊形式。

若以 n 表示工作种类，m 表示人（或机器）数，当 $m=n$ 时，称为平衡性（Balanced）指派，当 $m \neq n$ 时，称为不平衡性（Unbalanced）指派（或特殊指派）。

4.5.1 指派问题的数学模型

设 n 个人被指派做 n 种工作，C_{ij} 表示（工作、效率）成本，变量 x_{ij} 表示第 i 个人做（或者不做）第 j 项工作。则指派问题的模式可以表示如表 4-14。

表 4-14

工作 / 成本/变量 / 人员	1	2	…		$\dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}$
1	$\dfrac{C_{11}}{x_{11}}$	$\dfrac{C_{12}}{x_{12}}$	…	$\dfrac{C_{1n}}{x_{1n}}$	1
2	$\dfrac{C_{21}}{x_{21}}$	$\dfrac{C_{22}}{x_{22}}$	…	$\dfrac{C_{2n}}{x_{2n}}$	1
⋮	…………	……………	……………	……………	⋮
n	$\dfrac{C_{n1}}{x_{n1}}$	$\dfrac{C_{n2}}{x_{n2}}$	…	$\dfrac{C_{nn}}{x_{nn}}$	1
$\dfrac{b_j}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}$	1	1	…	1	

由此容易得到指派（极小化）数学模型：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\\ x_{ij}=\begin{cases}1, & 第i人做第j种工作\\ 0, & 第i人不做第j种工作\end{cases}\end{cases}$$

例 4.9 有四台机器，分别完成四项任务，由于机器性质，完成不同任务所用工时不同，如表 4-15 所示，问如何分派任务才能使总工时数最少？

显然，对 $n=4$ 指派方案有 4！(24）个，当 $n=10$ 时，指派方案超过三百万个。所以，对指派问题，特别是当 n 很大时，不能逐个找最优指派方案。用 0—1 规划或表上作业法，对解决指派问题同样是不经济的。

工时矩阵表 **表 4-15**

用工时数 工作 / 机器	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	5	9	4
A_2	6	7	5	4
A_3	2	5	8	5
A_4	8	2	6	1

4.5.2 指派问题的解法

1. 指派问题最优解性质。如果从系数矩阵的（C_{ij}）一行（或一列）各元素分别减去该行（或列）的最小元素，得到一个新矩阵（b_{ij}）。那么，以（b_{ij}）为系数矩阵指派问题的最优解（x_{ij}）和原问题的最优解相同。由表 4-15 知，欲使指派方案总工时最少，指派方案应该是每行（或列）工时最小元素的格位处 $x_{ij}=1$，行（或列）中其他元素处的 $x_{ij}=0$，这样做的结果和最优解的性质是一致的。

2. 最少工时（成本）的指派问题

以例 4。9 为例，根据最优解的性质，做以下工作：

A．使工时矩阵中出现 0 元素

1． 每行各元素减去该行最小元素；

2．每列各元素减去该列最小元素。

行或列内已有 0 元素者，不必做上述工作，于是得到矩阵 II，

（横）行减　　（竖）列减

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{矩阵 II}$$

B．试求最优解

画一条横线表示一台机器完成一项任务，画一条竖线表示一项任务已有机器去做，一行 0 元素多于一个者，表示该行的机器可以被指派（去完成任务）的位置不止一个，然而一台机器只能完成一项任务，所以只能画一条横线，一列的 0 元素多于一个者，原理相似，也只能画一条竖线。当所画直线条数等于 4 时，则此时可以得到最优指派方案。

1．初始指派：用最小直线画去矩阵 II 的全部 0 元素。换句话说，画线的原则是用一条直线应画去尽可能多的 0 元素，即：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ ② \\ \\ ① \end{array} \quad \text{III} \\ ③ \end{array}$$

所画直线数为$3<4$，不能得到最优指派。

2．指派的改进

（1）未被直线画去的所有元素减去其中最小元素，以便得到新的 0 元素。

（2）横、竖直线交叉处的所有元素，都加上（1）中所指出的最小元素（以避免重复指派和消除不当指派），得到新矩阵，并以最少直线画去全部 0 元素。即：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \quad \text{IV}$$

矩阵 IV 中所画直线条数为 4，并且不能再少，所以据此可以得到最优指派方案。

C．最优指派方案的确定

原则：

（1）0 元素最少的行或列首先指派；

（2）后面再被指派者，应和前面的指派不矛盾；

（3）所有行、列均有一个$x_{ij}=1$，其余的$x_{ij}=0$。

于是，由矩阵 IV，先指派 $x_{31}=1, x_{23}=1$，然后派 $x_{12}=x_{44}=1$，即最优指派是：

$A_1 \to B_2 \quad A_2 \to B_3 \quad A_3 \to B_1 \quad A_4 \to B_4$

最少总工时数为：

$$\begin{aligned}\min Z &= C_{12}x_{12}+C_{23}x_{23}+C_{31}x_{31}+C_{44}x_{44}\\ &= C_{12}+C_{23}+C_{31}+C_{44}\\ &= 13\end{aligned}$$

3. 最大效率的指派

这是极大化指派问题：$\max Z=\sum_i\sum_j C_{ij}x_{ij}$。它要求$C_{ij}$最大者所对应的$x_{ij}=1$（被指派)。由极大化指派可以想到使极大化指派问题中的C_{ij}变为 0，则以后的具体算法不变就成前面指出的极小化问题的所法了么？

设M为系数矩阵（C_{ij}）中的最大元素，那么，对极大化问题的系数矩阵（C_{ij}），可以构成一个新矩阵$(b_{ij})=(M-C_{ij})$，其中$b_{ij}\ge 0$，使极大化问题转化成极小化指派问题。

$$\begin{aligned}\min Z' &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M-C_{ij})x_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Mx_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}\\ &= nM - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}\end{aligned}$$

最优解就是原极大化问题的最优解。

例 4.10 将例 4.9 的工时改为效率，则问题转化为求解最大效率问题。用表 4-16 中最大数字 9，减去表内各个数，得到新的矩阵I：

表 4-16

机器 \ 工作效率 \ 任务	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	5	9	4
A_2	6	7	5	4
A_3	2	5	8	5
A_4	8	2	6	1

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad I$$

这时，原来最大的数（9）变化为 0，最小数（1）变化为最大的数（8），于是，矩阵 I 内的数字小者应被指派，它对应的就是最大效率，而数字大者则表示最小效率，不能被指派。那么，下一步的工作就是使矩阵 I 每行每列出现 0 元素，并按最小（成本）指派问题进行指派。

4． 特殊指派问题

事实上并不是每个工人都可以担当任何工作，也不是每套设备都可以指派于任何位置，而且需要分派的工作项目与可用的设备数目也未必相等，下述例子将说明指派受限制和数目不相等时，如何应用指派求解。

例 4.11 设有 M_1, M_2 和 M_3 三台机器，可以安装于 A, B, C 和 D 四个不同位置，各种不同安装后的成本见表 4-17，而且机器 M_2 无法安装于位置 C，试求如何安装才能使总成本最低。

应用指派求解这一问题，需增设一部虚构的 M_4，以便安装于多余的位置上，这样处理后得到表 4-18。

机器安装位置及成本 **表 4-17**

成本 / 机器 \ 位置	A	B	C	D
M_1	16	10	12	15
M_2	11	12	×	18
M_3	8	17	13	16

表 4-18

成本 / 机器 \ 位置	A	B	C	D
M_1	16	10	12	15
M_2	11	12	∞	18
M_3	8	17	13	16
M_4	0	0	0	0

求解时先将表 4-18 中各行数值分别减去各行中的最小值，得到矩阵 I 。

在矩阵 I 中，每列都有 0，所以各列中的数值不必再分别减去各列中的最小值。但矩阵中全部 0 只要三条线即可化去，所以还需继续求解。各未被画线的数字减去其中最小值 1，并在画线相交处的数值上分别再加上 1 得到矩阵 II。

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \infty & 7 \\ 0 & 9 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ③ \\ \\ \\ ① \end{array} \\ ② \end{array} \qquad \text{I}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \infty & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ ① \end{array} \\ ② \quad ③ \end{array} \qquad \text{II}$$

矩阵 II 中也只有三条线即可画去全部的 0，所以仍需继续求解。将未被画线的各数值分别减去其中最小值 2，并在画线相交处各数值上加 2，得到矩阵 III。

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \infty & 4 \\ 0 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{III}$$

观察矩阵 III，可知要用四条线才能画去全部的 0，因而可以得到最优指派。机器 M_1 和 M_2 都有两个适当的位置可以安装，但是不能随意决定，必须参考其它机器的安装位置再加以权衡。由于机器 M_3 只有一个适当位置 A 可以安装，因此机器 M_2 必须安装于位置 B ，那么机器 M_1 只能安装于位置 C 了。因为机器 M_4 为虚设，所以位置 D 空闲不用。依此种指派方式，安装机器的总成本为 32。

表 4-19

机器	安装位置	安装成本
M_1	C	12
M_2	B	12
M_3	A	8
总成本		32

此例说明，应用指派方案求解时，人员与任务、设备与安装位置必须相等，也就是说数据必须成方阵，否则可以虚设项目加以补充，以便凑成方阵加以求解。