第 7 章 目标规划

7.1 目标规划在管理决策中的意义

管理决策问题有难有简，有大有小。随着科学技术的发展，企业规模的不断扩大，人们在生产管理中和各种经济中，所遇到的问题，越来越大，越来越复杂，相应地要做出一个科学的决策，涉及的因素也越来越多。

在建筑管理，经济活动和工程设计中，经常碰到一些需要决策的问题。例如，需要判别某个住宅设计方案的优劣，某个施工计划的好坏等，当只考虑一个主要指标，决策个数不多时，可用单目标优化方法找出最优决策，线性规划和非线性规划就是处理单目标优化问题行之有效的方法。但在现实应用中，对一个决策方案进行评价时，往往需要对多个指标进行综合评价，例如，在住宅方案的评价中需要考虑平面布置、空间利用、安全可靠性以及厨房布置、造价等指标。在施工计划方案的考察中需要考虑工期短、造价低、质量好等。由于因素多，问题复杂，有时使决策者很难轻易地拍案定案。尤其在现代化生产和管理中，人们已经认识到由于轻率而不科学的决策所带来的结果和危害是极其严重的。对于这类经营和计划管理中的多目标决策问题，由于同时要对许多相互矛盾的各个目标进行优化分析，而且随着目标的增多，约束条件以及决策变量也增多。而想利用线性规划来处理这类问题就显得很困难。正因为如此，美国学者查恩斯（A．charnes）和库伯（W．Wcoopor）于 1961 年首次在《管理模型和线性规划的工业应用》一书中提出了目标规划的有关概念和数学模型，当时作为解一个没有可行解的线性规划的一种方法而引入的。1965 年尤吉·艾吉（Ruji．Ijiri）在处理多目标问题分类各类目标的重要性时，进一步完善了目标规划的数学模型。表达和求解目标规划问题的方法是由杰斯基莱恩和桑·李改进的。

本章所讲的目标规划仅是线性目标规划，它是在线性规划的基础上进行讨论的。

7.2 目标规划的基本概念及引例

7.2.1 引入目标偏离变量的概念

为了解决管理决策中遇到的有关互相矛盾目标的优化问题，可以引入目标偏离变量的概念，对系统的优化目标事先给予一个目标值，把目标实际可能达成的值与预定值之间产生的偏差定义为目标的偏离变量；然后，把对目标求极值问题转化为对目标的偏离变量求极值的问题进行解决。偏离变量有超过和不足两种情况，用 d^+ 表示可能实现值超过规定指标值的超过量，称为正偏离量，当正偏离量是未知数时，称它为正偏离变量。

用 d^- 表示可能实现值为能达到规定指标值的偏离量，称为负偏离量，当负偏离量未知时称为负偏离变量。用 d_i^+，d_i^-，表示第 i 个目标的正、负偏离变量。显然，在同一个问题中，d_i^+，d_i^- 是互补的；即 d_i^+ 与 d_i^- 之中至少有一个为零。

当现实值超过规定值时，$d_i^+ > 0$，$d_i^- = 0$

当现实值未达到规定值时，$d_i^- > 0$，$d_i^+ = 0$

当现实值恰好完成规定值时，d_i^-，$d_i^+ = 0$

以上三种情况可用一个数学式表示为：

$$d_i^- \times d_i^+ = 0$$

7.2.2 引例

为了说明问题，这里举例说明之。

例 7.1 某预制厂生产 A，B 两种预制构件，需要三种原材料 C_1，C_2，C_3，已知各种原材料的库存量及单位预制件的所获利润如表 7.1 所示。问该厂的决策者应如何安排 A，B 的产量，才使工厂的利润最大。

表 7.1

单位产品所需要材料 kg/件	产　　品		库　存　量
	A	B	
C_1	20	30	1200
C_2	40	20	800
C_3	—	10	300
单位利润/件	60	70	

解：设 A，B 的产量分别为 x_1, x_2 件，则得线性规划：

$$\max f(x) = 60x_1 + 70x_2 \qquad (1)$$

$$s.t\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \le 1200 & (2) \\ 40x_1 + 20x_2 \le 800 & (3) \\ 10x_2 \le 300 & (4) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

经求解，得出优解 $x^* = (30,20)^{\mathrm{T}}$，$f(x^*)$=3200 元，即当产品 A 生产 30 件，产品 B 生产 20 件时，工厂所得利润 3200 元为最大利润。

在生产实际中，利润指标往往是由上级部门或工厂计划部门下达，如在本问题中，假定计划部门下达的利润指标为 3100 元，这时车间领导又应如何组织生产呢？此时的问题利用线性规划就无法解决了，据目标规划的偏离变量的概念，我们假定利润的现实值与指标值之间的正偏离变量为 d_1^+，负偏离为 d_1^-。可将利润函数等价地表示为：

$$60x_1+70x_2-d_1^+ + d_1^- = 3100$$

它与线性规划的约束条件相比具有相同的意义，所以我们称它为目标规划的目标约束，而称原线性规划的约束条件(2)，(3)，(4)为目标规划的环境约束。至于目标规划的目标函数可依照以下方式来建立，据决策者的要求分为三种情况，相对于每种要求的目标函数为：

1.要求现实值超过或完成规定的利润指示，或完成 3100 元时，$d_1^- = d_1^+ = 0$；若超过时，$d_1^- = 0, d_1^+ > 0$，两种情况同时满足。工厂不希望利润低于 3100 元，即出现 $d_1^+ = 0, d_1^- > 0$ 的情况。一旦出现这种情况，也希望 d_1^- 尽可能小，因而在这种情况下目标函数可表示为：

$$\min Z = d_1^-$$

2.若要求实现值不超过规定指标时，目标函数应为正偏离变量 d_1^+ 越小越好或为零，即

$$\min Z = d_1^+$$

3.若要求现实值恰好为规定的指标值时，目标函数应为正、负偏离变量的和为最小或为零，即

$$\min Z = (d_1^+ + d_1^-)$$

现假定例 7.1 中的决策者要求完成或超额完成利润指标 3100 元，则得目标规划：

$$\begin{aligned}
&\min Z = d_1^- \\
&60x_1+70x_2-d_1^+ + d_1^- = 3100 \\
&20x_1+30x_2 \le 1200 \\
&40x_1+20x_2 \le 800 \\
&10x_2 \le 300 \\
&x_1, x_2, d_1^-, d_1^+ \ge 0
\end{aligned}$$

称以上的目标规划为单目标规划的目标规划，若目标多于一个时，称为多目标规划的目标规划。

例 7.2 在例 7.1 中，若车间领导除考虑完成 3100 元的利润外，还要求恰好将 C_3 原材料用完。这时原环境约束条件 $10x_2 \le 300$ 就要改为目标约束条件：

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 300$$

原单目标规划变成一个二目标问题。

其第一目标的目标函数为 $\min Z_1 = d_1^-$

第二目标的目标规划为 $\min Z_2 = d_2^- + d_2^+$

目标约束条件为

$$60x_1+70x_2-d_1^+ + d_1^- = 3100$$
$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 300$$

环境约束条件为

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \le 1200 \\ 40x_1 + 20x_2 \le 800 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0 \end{cases}$$

7.2.3 目标函数的优先级与权系数

由于各个优化目标的量纲和取值范围各不相同，若把一个多目标的问题化为一个单目标问题，将所有目标对应的偏离变量加起来，作为一个目标函数处理，往往不会得到理想的结果，甚至无可行解。为了得到使决策者比较满意的解，我们需将目标的重要程度分为等级，即给各目标冠以不同的优先级，最重要的目标给予第一优先级。目标的优先级别的高低分别用优先因子 P_1，P_2，…，P_K，…表示，规定 $P_K>>P_{K+1}$，即目标的优先级是一个定性概念，不同的优先级之间无法用数量衡量，仅仅表示优化过程中目标考虑的先后顺序。例如，在 7.2 中，利润目标和原材料 C_3 目标加在一起考虑是欠妥的，因为他们的量纲不同，主次地位也不同。若给利润目标赋予一级优先因子 P_1，材料目标放为次要地位，赋予二级优先因子 P_2。上述问题的两个目标函数可以合为

$$P_1 d_1^-, P_2(d_2^- + d_2^+)$$

对于同一优先级的不同目标，按其重要程度可分别赋予不同的权系数。权系数是一种可以用数量表示的指标，因此对于一个具体的目标规划问题，它是一个数字。

7.3 目标规划的数学模型

7.3.1 数学模型

由前引例可知目标规划的基本特征是：

1.对每个优化目标预先规定了一个目标值。

2.对每个优化目标需要引入偏离变量的概念，并且目标函数是以偏离为变量为自变量，且都要求极小化。

3.将目标分为若干不同的优先级。在同一优先级下不同目标可以赋予不同权系数。

设有 L 个目标，K 个优先级（K≤L）的一个目标规划问题。第 l 个目标的偏离变量为 d_l^-， d_l^+，在 K 级优先因子下，偏离变量的权系数为 λ_{kl}^- 与 λ_{kl}^+。第 l 个目标的指定值为 g_l，这时得到一般目标规划的数学模型为：

目标函数　　极小化 $Z = P_k \sum_{l=1}^{L} (\lambda_{kl}^- d_l^- + \lambda_{kl}^+ d_l^+)$

目标约束　　$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j - d_l^+ + d_l^- = g_l (l = 1, 2, ..., L)$

环境约束　　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) b_i (i = 1, 2, ..., m)$

非负约束 $x_j \geq 0 (j=1,2,...,n)$

$$d_l^-, d_l^+ \geq 0 (l=1,2,...,L)$$

7.3.2 目标规划的建模步骤

在第一章，学习过的线性规划建模方法和步骤对于本章的目标规划仍是适用的。除此之外，对于目标规划还需要考虑以下步骤：

1. 根据决策者提出的问题列出各目标与条件。
2. 确定各目标的优先级序列及问题的目标约束和环境约束。
3. 据各目标的优先级序列赋予相应的优先因子 P_k，K=1，2，…，L。
4. 对同一优先因子级中的各偏离变量，据此重要程度，赋予相应的权系数。
5. 据已知目标值以及偏离的要求，做出综合的目标函数。

7.3.3 目标规划与线性规划的区别与联系

将线性规划与目标规划作比较，我们不难看出以下两点：

1. 线性规划与目标规划之间存在着密切的联系，但又有不同。
2. 线性规划是目标规划的子集。

即凡是线性规划能够解决的问题用目标规划也可以解决；而许多线性规划无法解决的问题，用目标规划却能解决，现将他们之间的比较列表，如表 7-2 所示。

表 7-2

<table>
<tr><th colspan="3">目 标 规 划</th><th>线 性 规 划</th></tr>
<tr><td colspan="2">应用范围
确定目标值
辅助变量</td><td>对多目标规划系统进行优化
对每个优化目标事先确定一个目标值 g_i
正偏离变量和负偏离变量</td><td>对单目标系统进行优化
不确定目标值
松弛变量和人工变量</td></tr>
<tr><td rowspan="2">约束条件</td><td>形式</td><td>目标约束条件
环境约束条件</td><td>系统约束条件</td></tr>
<tr><td>绝对值</td><td>约束可行集具有弹性</td><td>要求绝对满足可行解集</td></tr>
<tr><td rowspan="3">优化内容</td><td>形式</td><td>加权和</td><td>目标函数</td></tr>
<tr><td>特点</td><td>1.根据要求对目标进行排序。
2.每个目标都能可以获得某一确定的值。
3.每个目标都转为求极小化。</td><td>要么达最优值，要么无最优值，无适中的达成值。</td></tr>
<tr><td>内容</td><td>可以对六种基本优化型进行组合：
1. $\min d_i^-$ 含义：不得低于目标值；
2. $\min d_i^+$ 含义：不得超过目标值；
3. $\min(d_i^- + d_i^+)$ 含义：尽量接近或等于目标值；
4. $\min(-d_i^- + d_i^+)$ 含义：新目标组合值越小越好；
5. $\min(d_i^- - d_i^+)$ 含义：新目标组合值越大越好；
6. $\min f(X)$ 含义：$f(X)$ 越小越好。</td><td>有两种基本形态：$\max f(X)$ 含义：要求 $f(X)$ 取值越大越好。$\min f(X)$ 含义：要求 $f(X)$ 取值越小越好。</td></tr>
<tr><td></td><td>严密性</td><td>优化结果找到的解是兼顾各目标，使决策者最满意的，相对意义上的最优解。具有通融性。</td><td>优化结果要么无最优解，要么有最优解，而且是绝对意义上的使 $f(X)$ 最佳值的优解。具有严密性。</td></tr>
<tr><td></td><td>对解的选择性</td><td>通过变换优先等级和目标值可以得到多组最优解供决策者分析选择。</td><td>只能得到唯一一组最优解，决策者无选择余地，除非变换模型参数。</td></tr>
<tr><td colspan="2">解　　法</td><td>主要有：①权和法；
②图解法；
③单纯形法。</td><td>主要有：①单纯形法；②运输等问题的特殊解法，如图、表上作业法。</td></tr>
<tr><td colspan="2">相互关系</td><td>可解决多目标问题也可解决单目标问题。是规划问题一般通用模式，其它规划问题都是它的子集。</td><td></td></tr>
</table>

7.4 目标规划的图解法

类同于线性规划的图解法，当目标规划模型中只含有两个变量（偏离变量不计入）时，可以用图解方法找出满意解。下面通过例子来说明目标模型的建立和图解操作步骤。

例 7.3 某建筑施工单位计划生产 A、B 两种预制构件。决策者首先考虑要充分利用供电部门分配的电量限额指标 62.5kw/日，其次考虑完成与超额完成利润指标 10 百元/日。每日可供给水泥 8 吨。其他有关数据如表 7-3 所示，问应如何确定 A、B 的产量。

表 7-3

产 品	耗电量（kW/单位产品）	水泥消耗（吨/单位产品）	利润（百元/单位产品）
A	10	2	1
B	12	1	2

解：设 x_1, x_2 分别表示 A、B 两种产品的日产量。根据给出的条件，得各目标的优先因子。“充分利用供电量”为第一指标赋予优先因子 P_1；而充分利用可用 $d_1^+ + d_1^-$ 为最小来表示。

d_1^- 表示电量设有用完的偏离量；d_1^+ 表示超过电量限额的偏离量。

超额完成利润指标为第二指标，赋予优先因子 P_2，以 d_2^+ 表示超额完成利润的偏离变量。因为问题要求超额完成利润指标，所以未完成利润指标的偏离变量 d_2^- 应最小。

归纳以上叙述，得出目标规划数模：

目标函数　$\min Z = \{P_1(d_1^- + d_1^+), P_2 d_2^-\}$

目标约束　限电指标　$10x_1 + 12x_2 - d_1^+ + d_1^- = 62.5$

　　　　　利润指标　$x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10$

环境约束　原料能力　$2x_1 + x_2 \le 8$

非负性约束　$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0$

先以 x_1, x_2 为轴画出平面直角坐标系，在确定坐标的长度单位后，将代表各目标约束以及环境约束的直线方程分别表示在坐标平面内，如图 7-1 所示。

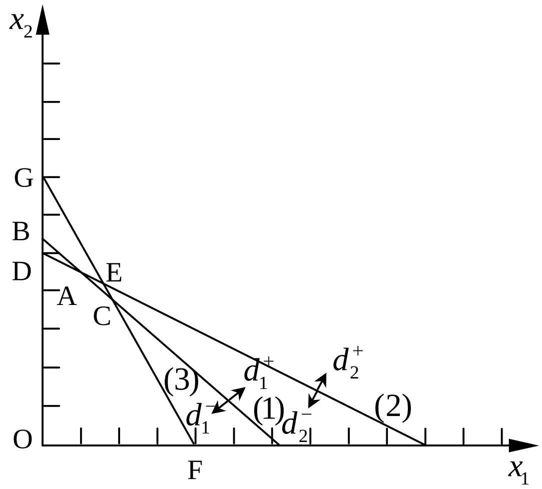

图 7-1

根据目标函数的要求，首先要考虑优先因子 P_1 中的 $d_1^- + d_1^+$ 最小化。当 $d_1^+ + d_1^-$ 最小时，只能取 $d_1^+ + d_1^- = 0$ 即 $d_1^+, d_1^- = 0$。从而可知，凡落在直线（1）上的点都是可行的。其次考虑带优先因子 P_2 的 d_2^- 的极小化。因为当 d_2^- 为最小时，只能有 $d_2^- = 0$，即满足 P_2 的解应在直线（2）上

或在（2）的右上方。归纳 P_1， P_2 得出的公共解应该对应图 7-1 中线段 AB 上的点。第三，由环境约束（3）知，满足 x_1, x_2 的解对应于图 7-1 中 OGF 上的点。归纳以上三条分析可知，既满足约束条件又满足目标函数的解对应于线段 A、B 上的点。又因为 A（0.628，4.68），B（0，5.2），所以以 A，B 为端点的线段：

$$x = \alpha_1 A + \alpha_2 B = \alpha_1 (0.628, 4.68) + \alpha_2 (0, 5.2)$$

$= (0.628\alpha_1, 4.68\alpha_1 + 5.2\alpha_2)$ 都是满意解，其中 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ 。

例 7.4 某工厂生产 A，B 两种产品，工人的有效工时为每月 1400 小时，有关安排生产计划所需数据如表 7-4 所示。

表 7-4

产品	工时定额（h/Q）	最大销售量（Q/B）	利润（元/Q）
A	20	60	300
B	10	100	120

工厂决策者首先要求完成与超额完成月利润指标 2400 元。

其次考虑产品不能积压，生产不要超过每月有效工时。试确定各种产品的月产量。

解：设 x_1, x_2 分别表示 A，B 的月产量。根据决策者的要求得出各目标的优先次序为

第一：完成与超额完成月利润指标；

第二：生产量不超过最大销售量；

第三：不超过月有效工时；

本问题的目标规划数模为

目标函数 $\quad \min Z = \{P_1 d_1^-, P_2(d_3^- + d_4^+), P_3 d_2^+\}$

目标约束 $\quad$ 利润指标 $\quad 300x_1 + 120x_2 - d_1^+ + d_1^- = 24000 \qquad (1)$

工时指标 $\quad 20x_1 + 10x_2 + d_2^- - d_2^+ = 1400 \qquad (2)$

生产能力
$$\begin{cases} x_1 + d_3^- - d_3^+ = 60 & (3) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 & (4) \end{cases}$$

非负约束 $x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3,4$ 。用图解法求解，见图 7-2。先考虑满足具有优先因子 P_1 和 d_1^- 的极小化。从图 7-2 知，当 $d_1^- = 0$ 时，可行解在直线（1）或（1）的右上方。满足具有优先因子的正偏离变量 d_3^+ 与 d_4^+ 的和极小化，由于要求 $d_3^- + d_4^+$ 越小越好，从而只能有 $d_3^-, d_4^+ = 0$ ，由图 7-2 可知，可行解只能在直线 (4) 的下方与直线 (3) 的左方区域 ODFA 上。

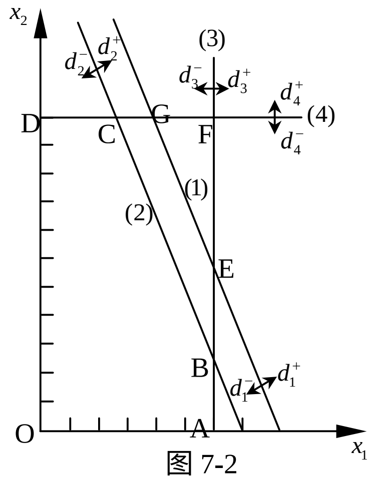

图 7-2

将 P_1 与 P_2 综合起来考虑，满意解应在区域 GFE 上。

最后考虑优先因子 P_3，要求 d_2^+ 极小化。若 $d_2^+=0$ 时，满足 P_3 的解应在直线（2）的左下方。这时与优先因子 P_1 产生矛盾，即无公共部分。但按照我们处理的思路，应在 P_1，P_2 的目标优化的前提下，再考虑 P_3（d_3^+ 最小）的优化问题。因此必须从 EFG 上找距离直线（2）最短的点，这就需要得一个既使 $d_2^+\neq 0$ 又使 d_2^+ 最小的点。将直线（2）向右上方平行移动，最早碰到 EFG 上的点为 E 点，故 E 点对应的坐标就是使目标函数极小化的满意解。E 点的坐标为（60，50），即得到 x_1=60，x_2=50 的最佳生产计划方案。

将上面求的满意解代入目标规划数模得

目标函数　　$Z=P_3d_2^+$

利　润　　300×60+120×50=24000

工　时　　20×60+10×50+0－ d_2^+ =1400

$$d_2^+=300>0$$

生产能力　$\begin{cases}1\times 60=60\\ 1\times 50=50<100\end{cases}$

由上面验算结果说明，要完成最佳计划方案 $(60,50)^T$，有效工时不得够用，说明 $(60,50)^T$ 不是可行解，仅是一个满意解。如果要使它成为可行，工厂领导在组织生产时，要加班 300 小时或通过技术措施降低单位产品的生产工时。若领导愿意降低单位产品工时，可做以下分析：

因为 $h=\dfrac{1700-1400}{1400}=21.4\%$，所以每种产品的工效提高率为 21.4%，才使上方案变为可行。这时 A、B 两种产品的单位工时定额应加以修改。

产品 A 的工时应改为 20/（1+h）=16.5h/Q

产品 B 的工时应改为 10/（1+h）=8.2h/Q

从上例可以看到，虽然求的满意解是非可行解，但它却指出了薄弱环节在何处，给决策者指明了改进工作的方案，以便提高企业的经济效益。

7.5 目标规划的单纯形法

目标规划的数学模型与线性规划问题的数学模型结构相似，所以利用线性规划的单纯形法求解目标规划的步骤也相似。仅由于目标规划中目标函数分不同的优先级，因此应该首先寻找使第一优先级的目标达到最优，然后转向下一级，当下一级目标达到最大可能满足后，再转为更低一级，依次类推，直至最低优先级为止，这样保证不会由于满足较低优先级的目标而破坏了较高优先级的目标的成立。下面以例 7.3 的模型求解来说明。

例7.5 已知目标规划

$$\min Z=\{p_1(d_1^-+d_1^+),\ p_2d_2^-\}$$

$$s.t\begin{cases}10x_1+12x_2+d_1^--d_1^+=62.5\\ x_1+2x_2+d_2^--d_1^+=10\\ 2x_1+x_2\le 8\\ x_1,x_2,d_1^+,d_1^-,d_2^+,d_2^-\ge 0\end{cases}$$

试用单纯形法求解。

第一步：将目标规划标准化。

$$\min Z=p_1d_1^-+p_1d_1^++p_2d_2^-$$

$$s.t\begin{cases}10x_1+12x_2+d_1^--d_1^+=62.5\\ x_1+2x_2+d_2^--d_1^+=10\\ x_1+2x_2+x_3=8\\ x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^-\ge 0,i=1,2\end{cases}$$

第二步：列出初始单纯形表。由于各目标约束中的负偏离变量相当于松弛变量，所以以 d_1^-,d_2^-,x_3 为变量，列出的初始单纯形表如表 7-5 所示：

表 7-5

C_j		p_1	0	0	0	1	1	0	0	
		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
C_B		X_B	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	b
1	0	d_1^-	10	12	0	1	-1	0	0	62.5
0	1	d_2^-	1	2	0	0	0	1	-1	10
0	0	x_3	2	1	1	0	0	0	0	8
Z_j		p_2	1	2	0	0	0	1	-1	
		p_1	10	12	0	1	-1	0	1	
C_j-Z_j		p_2	-1	-2	0	0	0	1	-1	
		p_1	-10	-12	0	0	2	-1	1	

由于目标规划具有优先级 p_1， p_2,所以目标系数 C_j 以及 Z_j 和检验数行 C_j-Z_j 都有

两行，其顺次变由外向内排列。

第三步：确定λ基变量。在上单纯形表中，按优先级顺序依次检查检验数行$C_j - Z_j$是否有负值。表 7-5 中的 p_1 行存在负数，说明具有优先级 p_1 的目标函数需要进一步优化。选取 p_1 行中绝对值最大的负检验数-12，对应的变量 $x_2\lambda$ 基。

第四步：确定出基变量。同线性规划的单纯形法和θ规则一样，用常数项b列与 x_2 列的数字比值为正（含零）的最小值对应的变量出基，本列为 d_2^-。

第五步：进行基变换。用线性规划单纯形的基变换方法进行变换，得出表 7-6。

表 7-6

C_j		p_1	0	0	0	1	1	0	0	
		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
C_B		X_B	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	b
1	0	d_1^-	4	0	0	1	-1	-6	6	2.5
0	0	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
0	0	x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
Z_j		p_2	0	0	0	0	0	0	0	
		p_1	4	0	0	1	-1	-6	6	
$C_j - Z_j$		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
		p_1	-4	0	0	0	2	6	-6	

第六步：重复第三至第五步的运算得表 7-7：

表 7-7

C_j		p_1	0	0	0	1	1	0	0	
		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
C_B		X_B	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	b
0	0	d_2^+	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	-1	1	$\frac{5}{12}$
0	0	x_2	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{125}{24}$
0	0	x_3	$\frac{7}{6}$	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{67}{24}$
Z_j		p_2	0	0	0	0	0	0	0	
		p_1	0	0	0	0	0	0	0	
C_j-Z_j		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
		p_1	0	0	0	1	1	0	0	
0	0	x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{8}$
0	0	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{225}{48}$
0	0	x_3	0	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{33}{16}$
Z_j		p_2	0	0	0	0	0	0	0	
		p_1	0	0	0	0	0	0	0	
C_j-Z_j		p_2	0	0	0	0	0	1	0	
		p_1	0	0	0	1	1	0	0	

由表 7-7 中的第一表可知，p_1 p_2 对应的所有检验数 λ_1, λ_2 非负，得出优方案：$x_1 = 0, x_2 = 5.208, x_3 = 2.79, d_2^+ = 0.4107$，说明了 A 产品不生产；B 产品的产量为 5.2；生产原料可剩余 2.79；利润超额 0.416 元，电量指标恰好完成。

在表 7-7 的第 2 表中得到另一组优解：$x_1 = 0.625, x_2 = 4.64, x_3 = 2.06$。说明了电量指标和利润指标都恰好完成，而剩余原料为 2.06。

对于上例我们现已求解完毕，但还需说明两点：

1. 对目标函数的优化是按优先级次序逐级进行的。当单纯形表中 p_1 的检验数均非负时。据线性规划的最优判别准则知，第一级目标已优，可转入第二级，考察 p_2 行的检验数是否均为非负，依次类推。若所有 p_k 行的检验数都非负，这时表中得到解为满意解。

2. 当 $p_1, p_2, ..., p_j$ 行所有检验数均为非负，第 p_{j+1} 行存在负检验数，但在负检验数所

在列的上面行中有正检验数，这是单纯形表中对应的解仍为满意解。这时由于目标规划的目标较多，不可能使所有级别的目标都恰好优化。在单纯形表中迭代时，往往会出现，p_{j-1} 行的检验数非负，但 p_j 行某负检数 λ_j 上面的检验数 p_{j-1} 为正数，这时若选 x_j 为 λ 基变量，将要破坏较高一级目标的优化问题。

因此从 p_2 行起，只有当某一行存在负检验数，而该检验数同列的较高优先级的行中不存在正检验数时，才需要继续迭代。

7.6 模型应用举例

例 7.6 设某一公司下设几个工厂。其中一个工厂的任务是用四种原料（A_1～A_4）生产五种产品（B_1～B_5）。对原料用量有如下限制：A_1 较丰富，至少用 600 吨；A_2 不超过 800 吨；A_3 不得超过 700 吨；A_4 要求用量适中，在 170～200 吨之间。对产品的产量也有限制：B_1 产品不得超过 150 吨；B_2 不得低于 100 吨；B_3 的生产量越少越好；B_4 不受限制；B_5 要求在 220～250 吨之间。四种原料的成分分别为 4，6，8 和 7（4 元/吨），五种产品的单位利润以及单位产品的耗电量和耗煤量如下表 7-8 所示。

表 7-8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
利润（元/吨）	700	800	1300	1600	1100
耗电量（度/吨）	16	18	20	25	20
耗煤量	0.7	0.7	0.9	1.2	0.9

企业的决策方针和要达到的目标，按以下优先顺序进行考虑：

1. 首先要满足对原料及产品的限制要求。

2. 该工厂五种产品作为本公司所属另一工厂的原料，合成为一种新产品。该新产品又

有两项质量指标：强度（用 g_1 表示）和杂质含量（用 g_2 表示），g_1，g_2 都与上述五种产品的含量有关。设五种产品的产量分别为 $x_1, x_2, ..., x_5$。据大量实测数据的统计分析，得出回归线性方程

$$g_1 = -28.5 + 0.18x_1 + 0.14x_2 + 0.26x_3 + 0.34x_4 + 0.29x_5$$
$$g_2 = 12.5 + 0.65x_1 - 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.12x_4 - 0.09x_5$$

对总产品的质量要求：强度 g_1 控制在 100～110 之间，最好取上限；杂质含量 g_2 控

制在 40.3～40.8 之间，最好取下限。

3. 保证完成上级下达的 55 万元的利润指标，并力争超额 5%。

4. 用电量不得超过 11000 度的规定指标，迫不得已时才允许超过。超过时与不超时的遗憾之比是 5∶1。

5. 成本越低越好。

6. 用煤量越少越好。

根据上述要求，试问如何安排该公司的生产才能同时满足各项指标。

解：设第 j 种产品的产量为 $x_j(j=1.2.....5)$。

据决策者的要求，得出目标函数的各分目标为：

（1）原料约束对应的目标的优先因子为 p_1

$s_1=d_1^-+d_2^++d_3^++c_4^++d_4^+$

（2）将产量约束所对应的目标的优先因子为 p_2

$s_2=x_2+d_5^++d_3^++d_4^++c_4^+$

（3）质量目标的优先因子为 p_3

$s_3=2d_{10}^-+2d_{11}^++d_{10}^++d_{11}^+$

（4）利润目标的优先因子为 p_4

$s_4=d_8^-+c_8^-$

（5）电量指标的优先因子为 p_5

$s_5=5d_9^++d_9^-$

（6）成本目标的优先因子为 p_6

$$s_6=4(x_1+2x_3+3x_5)+6(2x_1+4x_4)+8(3x_2+2x_4)+7(4x_3+x_5)$$
$$=16x_1+24x_2+36x_3+40x_4+19x_5$$

（7）耗煤指标的优先因子为 p_7

$s_7=0.7x_1+0.7x_2+0.9x_3+1.2x_4+0.9x_5$

归纳得出目标规划数学模型

$\min s=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7\}$

满足条件：

$$x_1+2x_3+3x_5+d_1^-+d_1^+=600$$
$$2x_2+4x_4+d_2^-+d_2^+=800$$
$$3x_2+2x_4+d_3^-+d_3^+=700$$
$$4x_3+x_5+d_4^--d_4^+=220$$
$$d_4^-+c_4^--c_4^+=50$$
$$x_1+d_5^--d_5^+=150$$

$$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 100$$
$$x_5 + d_7^- - d_7^+ = 250$$
$$d_7^- + c_7^- - c_7^+ = 50$$
$$700x_1 + 800x_2 + 1300x_3 + 1600x_4 + 1100x_5 + d_8^- - d_8^+ = 550000$$
$$d_8^+ + c_8^- - c_8^+ = 27500$$
$$16x_1 + 18x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 20x_5 + d_9^- - d_9^+ = 1100$$
$$0.18x_1 + 0.14x_2 + 0.26x_3 + 0.34x_4 + 0.29x_5 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 128.5$$
$$d_{10}^+ + c_{10}^- - c_{10}^+ = 10$$
$$0.65x_1 - 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.12x_4 - 0.09x_5 + d_{11}^- - d_{11}^+ = 28.3$$
$$d_{11}^- + c_{11}^- - c_{11}^+ = 0.5$$

所有决策变量和偏离变量≥0

用计算机求解，得出结果：

$$x_1 = 75.6715, x_2 = 172.3458, x_3 = 0$$
$$x_4 = 91.4813, x_5 = 220$$
$$d_2^- = 282.732, d_5^- = 74.33, d_7^- = 30$$
$$d_1^+ = 135.67, d_6^+ = 72.35, d_8^+ = 29216.72$$
$$d_{10}^+ = 4.15, c_4^- = 50, c_7^- = 20$$
$$c_8^+ = 1716.72, d_{10}^- = 5.85, c_{11}^- = 0.5$$

其它偏离变量取值为零。

对应的各目标值：

$$s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, s_4 = 0, s_5 = 0,$$
$$s_6 = 13186.29, s_7 = 481.39$$