第 8 章 存储论

8.1 存储问题

每一个企业在生产经营活动中都会遇到存储问题。一般情况下，企业的生产活动都是按流水作业原理进行安排的，因此必须存储一定量的原材料、燃料、外构件（或称半成品），以保证生产的连续性。随着生产活动的进行，不断消耗库存“物资”，产出成品，共给其他企业生产消费，或者满足人民的个人生活消费需要。当存储物资减少到一定程度时，又需要补充以便保证下一阶段生产的正常进行。从生产的角度考虑，存储物资“多多益善”，然而这样做又要增加仓库面积、增大存储费用，又要占用大量的流动资金，从而导致产品成本的提高，因此并非可取之策。与之相反，为了降低产品成本，尽可能减少存储“物资”。而且在现代化管理方法中，还提出了前后生产工序之间实行“零存储”的问题，即前道工序的产品作为下道工序的“原料”供给时，是按照下道工序提出的需要来安排生产的，需要多少生产多少。但是，在实际生活中影响因素繁多，诸如原料产地，运输条件，气候变化，采购及运输的批量，另外如供电、机器设备、工人情绪等等，都随时影响到“及时供应”的问题，所以存储越少越好也绝非最优之策之于“零存储”，目前只用于某些生产的工序之间，作为供应社会的最终产品，很难作到“零存储”。因而存储多少最为理想是人们共同关心的问题。从另一角度考虑，在生产之前，要进行生产准备，安装，调整机器，需要花费一定（安装）费用，在机器运转之后，究竟一次生产多少产品为好？就安装费而言，一次的产量自然是越多越好，但另一方面，一次的产量过多，则需大量的仓库存放。因而是存储费用增加。相反，若一次生产量太少，虽然可以减少存储费，但这样不仅单位产品费用增加，有时会发生缺货现象而造成缺货损失。一般来说，存储“物资”多少，或者安排生产量多少，应满足各种费用总期望值达到最小。

企业的“物资”存储，一般引起以下一些费用：

1．存储费：它是物资在存储期间应支付的仓库管理费、仓库保险费以及因存储时间过久而变质或损坏等所支出的费用。例如水泥因存储时间长而降低标号等。

2．建立费：它包括物资存储中的购置（或称订货）手续费，该项费用的大小不随购买物资的多少而变化，仅随购买物资的次数而变动。还包括自行生产储备物资时（半成品）时花费在安装机器、设备、准备工作等方面的费用。他的大小与每批的产量无关，只随生产的批数而变化。有人称建立费为“安装费”，也有人把建立费分为订货费和生产费两项。

3．缺货损失费：当存储物资不足、发生供应中断、因停工待料或因失去销售机会

而造成损失，统称为缺货损失费。

企业存储物资所采用的方法，通常有以下几种：

1.一次存储法：把一定时期中所需要的物资，一次性采购集合，储备起来供应需要。

2.多次存储法：把一定时期中所需要的物资，分几次采购，储备供应。

3.定时存储法：定期的检查物资的储备量并加以补充，是储备量总是保持在一定数量水平上。

4.定量存储法：即储备的物资费分为经常储备和保险储备两部分，每当经常储备用完，开始动用保险储备时，就补充以定量物资。

5.S-s 存储法：大 S 代表最大存储量或最高存储水平，小 s 表示最低存储水平。当定期检查时，发现存储量小于小 s 或等于小 s 时，就补充储备额，使其恢复到最高存储水平。

在研究存储方法的时候，又是必须考虑限制条件，例如仓库容积、物资的筹集时间等。当存储量和库容量相比很小时，物资筹集时间很短且很容易，都可以满足要求时，这方面的限制条件就可以忽略不计了。

确定存储方法和数量等有关问题时，应该把实际问题抽象为数学模型。在形成模型过程中，对一些复杂的条件尽可能加以简化，使其能反映问题的本质就可以了。然后对数学模型用数学方法加以研究，得出相应的数量结论。这种数量结论是否正确，还要拿到实践中加以检验，如果结论与实际不符，则要对模型重新加以研究和修改。经过人们的长期努力，已经得出一些行之有效的存储模型，大体上可以分为两类，一类为确定性的，即模型中的数据皆为确定的；另一类成为随机的，即模型中含有随即变量。因此，根据数学模型，存储可分为确定性存储和随即性存储。

8.2 确定性存储模型

8.2.1 不允许缺货

设某钢筋混凝土预制构件工厂在 T 时间内，按一定速度供应建筑工地 R 件成品，需求是固定的且已知。假设缺货是绝对不允许的，因此，却活损失可以认为是无穷大。

首先，我们分析这个问题。众所周知，混凝土制品成型必须有一段养护时间，由于养护场地的限制，预制构件需成行一批养护一批，间断式的进行生产。设每批产量为 q 件，在 T 时间内共生产 n 批制品，每批制品的生产周期为 t_s，于是有：

$$n = \frac{R}{q}$$

$$t_s = \frac{T}{n} = \frac{T * q}{R}$$

当一批制品达到强度要求后，就可以以一定的速度开始向建筑工地供应，直到该批

产品供应完，才开始供应第二批达到强度要求的制品，如此循环，直到 R 件制品供应完为止。

为了方便，在不影响问题时至的情况下，我们假设每批产品的生产周期是从构件达到强度要求而堆放的“ 仓库 ”开始，到该批产品供应完为止。于是，我们的问题可以用图 8-1 表示。

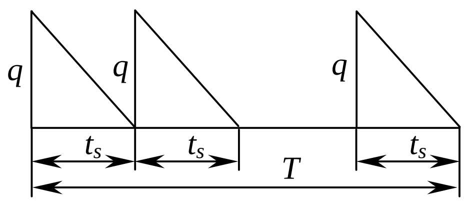

图 8-1

可以看出，在 t_s 期间，仓库中制品的平均存储水平为 $\frac{q}{2}$。

我们用 C_1 表示在单位时间内，单位制品的存储费，C_c 表示生产每项制品的建立费，则在 t_s 内的存储费用为：

$$\frac{q}{2}\bullet t_s \bullet C_1$$

在每个生产周期发生的费用为存储费加安装费（建立费）：

$$C_s^t = \frac{1}{2}q\bullet t_s\bullet C_1 + C_c$$

于是在时间 T 内发生的总期望费用为：

$$G_T = (\frac{1}{2}qt_sC_1 + C_c)\bullet n = \frac{R}{q}(\frac{q}{2}\bullet\frac{Tq}{R}\bullet C_1 + C_c) = \frac{1}{2}qTC_1 + \frac{RC_c}{q} \qquad (8\text{-}1)$$

式（8-1）中的右边第一项表示存储的总费用，第二项表示一切安装费用。很显然，第一项的存储费用随 q 而增加，第二项的存储费用随 q 而减小。如图 8-2 所示。能使以上两项费用之和达到最小的某一个 q_0 就是这个存储问题的解答。可以看出，这是一个简单的求极值问题。

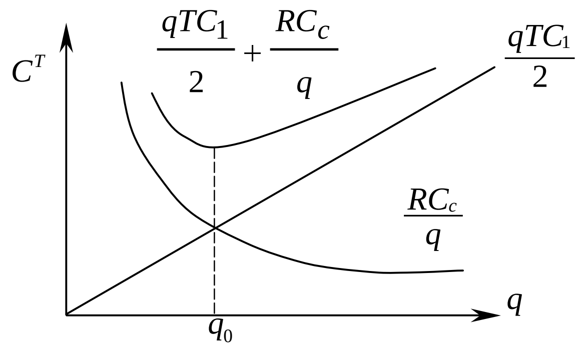

图 8-2

将 C_T 对 q 微分并使之等于 0：

$$\frac{dC_T}{dq} = \frac{1}{2}T_{c_1} - \frac{RC_c}{q^2} = 0$$

得：

$$q_0 = \sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}} \qquad (8\text{-}2)$$

因为：

$$\frac{d^2C_T}{dq^2} = \frac{2RC_c}{q^3} > 0$$

所以，当 $q = q_0$ 时，一定能使总期望费用达到极小值 C_{T0}。当 $q = q_0$ 时，t_s 用 t_{s0} 表示：

$$t_{s0}=\frac{T}{R}q_0=\sqrt{\frac{2TC_c}{RC_1}} \tag{8-3}$$

那么，最小期望费用C_{T0}为：

$$C_{T0}=\frac{1}{2}Tq_0C_1+\frac{RC_c}{q_0}=\frac{1}{2}TC_1\sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}}+RC_c\Big/\sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2RC_1TC_c}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{RTC_1C_c}=\sqrt{2RTC_1C_c} \tag{8-4}$$

（8-4）式告诉我们，当存储费用和安装费用相等时，不允许缺货的存储模型，总期望费用最小。

例 8.1 某钢筋混凝土预制构件厂每年需将某种制品 24000 件供应建筑基地，已知需求是固定的。建筑工地采用随运随吊装的施工方案，因此工厂必须将每日的需求量当天供应，并且不允许缺货。每一制品每月存储费是 0.10 元，每一制造循环的安装费是 350 元，试求每一制造循环中最优制品数量、相应的循环时间以及每年的最小总期望费用。

解： 已知　$T=12$（月）　　$R=24000$（件）

$C_1=0.01$（元/件月）　　$C_c=350$（元/批）

带入公式（8-2)、(8-3）用（8-4）得

$q_0=3742$(件/批)

$t_{s0}=1.87$(月）（或8.1周）　$C_{Tc}=4490$(元)

8.2.2 允许缺货

该模型中缺货费用不是无穷大，因而允许缺货。那么企业可以在存储下降至零后，还可以等一段时间再生产（或进货）。这就意味着企业可以少付一些安装费（或订货费）和存储费，对企业来说可能是有利的。该模型与模型 1 相比，仅有缺货损失费的区别外，其余情况一样。

设 S 为每个时间区间t_s开始的存储水平。t_1为有货时间，t_2为缺货时间，$(q-s)$为缺货量，C_2为单位产品在单位时间内的缺货损失费。则在时间T内的存储情况可用图 8-3 表示。

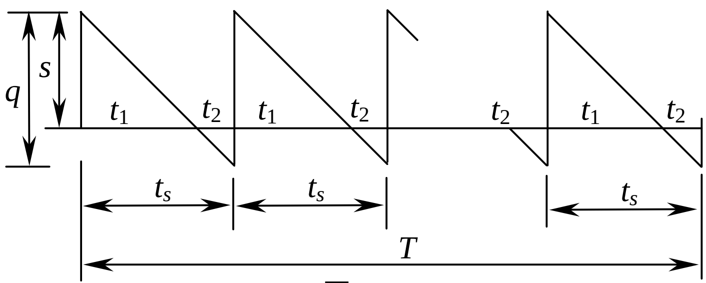

图 8-3

在 t_1 中的平均存储水平为 $S/2$，平均存储费用为 $\frac{1}{2}st_1C_1$；在 t_2 内的平均缺货量为 $\frac{1}{2}(q-s)$，平均缺货损失费为 $\frac{1}{2}(q-s)t_2C_2$，于是，在时间 T 内的总期望费用是：

$$C_T=\left[\frac{1}{2}St_1C_2+\frac{1}{2}(q-S)t_2C_2+C_c\right]\cdot n$$

由图知 $t_1=\frac{s}{q}t_s$， $t_2=\frac{(q-s)}{q}t_s$，所以：

$$C_T=\left[\frac{S^2}{2q}t_sC_1+\frac{(q-s)^2}{2q}t_sC_2+C_c\right]\frac{R}{q}$$

将模型一中关于 $t_s=\frac{Tq}{r}$ 带入上式，则得：

$$C_T=\frac{1}{2q}[S^2TC+(q-S)^2TC_2+2RC_C]$$

现在求出函数 C_T 的极小值。求偏导数：

$$\frac{\partial C_T}{\partial S}=\frac{1}{q}[STC_1-(q-s)TC_2]$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial q}=-\frac{1}{2q^2}[STC_1-[2q(q-s)-(q-S)^2]TC_2+2RC_c$$

等于零，则得：$S=\frac{C_2}{C_1+C_2}\cdot q$

$$q^2C_2-(C_1+C_2)S^2=\frac{2RC_c}{T}$$

将以上两个联立方程得：

$$q_0=\sqrt{\frac{2RC_c(C_1+C_2)}{TC_1C_2}}=\sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}} \quad (8\text{-}6)$$

$$s_0=\sqrt{\frac{2RC_cC_2}{TC_1(C_1+C_2)}}=\sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}} \quad (8\text{-}7)$$

因 $\frac{\partial^2C_T}{\partial s^2}>0$， $\frac{\partial^2C_T}{\partial q^2}>0$，故

当 $q=q_0,s=s_0$ 时， C_T 达到极小值。将 q_0 代入有：

$$ts_0=\frac{Tq_0}{R}=\sqrt{\frac{2TC_0(C_1+C_2)}{RC_1C_2}}=\sqrt{\frac{2RC_c}{TC_1}}\quad\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}} \tag{8-8}$$

于是总期望费用：

$$G_{T_0}=\frac{{S_0}^2TC_1}{2q_0}+\frac{(q_0-S_0)TC_2}{2q_0}+\frac{2RC_c}{2q_0}=\sqrt{2RTC_1C_c}\quad\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}} \tag{8-9}$$

可以看出，模型二比模型一仅多一项：$\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$

由于 $$\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}<1$$

所以，模型二（允许缺货）比模型一的总期望费用小。

例 8.2 某商店经过预测，在一年内需要进某种货物 12000 件，预计每件货物月存储费为 5 角，如果发生缺货时，每件每月可造成损失 1.5 元。在每次订货费 30 元的情况下，试求 ts_0，S_0，G_{T_0}。

解：利用公式

$$s_0=\sqrt{\frac{2RC_cC_2}{TC_1(C_1+C_2)}}=\sqrt{\frac{2\times12000\times30\times1.5}{12\times0.5\times2}}=300 \text{（件）}$$

$$ts_0=\sqrt{\frac{2TC_0(C_1+C_2)}{RC_1C_2}}=\sqrt{\frac{2\times12\times30\times2}{12000\times0.5\times1.5}}=0.4 \text{（月）}$$

$$G_{T_0}=\sqrt{\frac{2RC_cC_1C_2}{C_1+C_2}}=\sqrt{\frac{2\times12000\times12\times0.5\times1.5\times30}{0.5+1.5}}=1800 \text{（元）}$$

答：订货周期为 0.4 个月，存储水平为 300 件，总期望费用为 18000 元。

例 8.3 将例 1 增加一个可以缺货的条件，每单位制品每月的缺货损失费假定为 0.2 元，试求所需指标。

解： $$\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=1.225$$

$$\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816$$

所以： $q_0=3742\times1.225=4583$（件/每批）

$ts_0=1.87\times1.225=2.29$（月）

$s_0=3742\times0.8167=3056$（件）

$$G_{T_0}=4490\times0.8167=3667\text{（元/年）}$$

可以看出，由于允许缺货，生产周期增长，每批产品产量增加，存储水平有所降低，相应总期望费用也在减少。

8.3　随机性存储模型

1.列表求解随机离散存储问题

设某企业需要某种配件，每天可能用量为 0 至 5 件，每件的购买成本为 2 元，若缺一件则损失收益 5 元。若不用则需要保管费为每件每天 1 元，根据以往统计资料，每一种可能用量发生的概率如表 8-12 所示。

表 8-1

需用量	0	1	2	3	4	5
概率	0.05	0.15	0.25	0.30	0.15	0.10

试求其最低成本的采购决策。

解：由题知，建立费为 $C_c=2$ 元，缺货损失费 $C_2=5$ 元，存储费为 $C_1=1$ 元，若 s 为采购量，n 为需用量，相应概率为 $P(n)$，则根据题意可列出采购决策成本表（8-2）。

由表（8-2）知，采购量和需用量相当时，成本最低。但由于需要是随机的，我们只能根据不同需要量的概率确定不同决策的期望成本，从中选择最优采购决策。

表 8-2

成本 S \\ n	0	1	2	3	4	5
0	0	3	6	9	12	15
1	5	2	5	8	11	14
2	10	7	4	7	10	13
3	15	12	9	6	9	12
4	20	17	14	11	8	11
5	25	22	19	16	13	10

采购决策的期望成本　　**表 8-3**

$P(n)$	成本 S \\ n	0	1	2	3	4	5
0.05	0	0	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75
0.15	1	0.75	0.30	0.75	1.20	1.65	2.10
0.25	2	2.50	1.75	1.00	1.75	2.50	3.25
0.30	3	4.50	3.60	2.70	1.80	2.70	3.60
0.15	4	3.00	2.55	2.10	1.65	1.20	1.65
0.10	5	2.50	2.20	1.90	1.60	1.30	1.00
总期望成本		13.25	10.55	8.75	8.45	9.95	12.35

现在观察表 8-3，它告诉我们，当采购决策为 3 件时，总期望成本是 8.45，达到最低值，一因而，为最优采购决策。

2．应用数学模型求解

设某建筑工地即将订购一台新的发电机，发电机中某一主要部件构造复杂，价格亦昂贵，该主件除连同发 QQ 电机购买外，以后单独订购不合实际，因为每一主件都是与其特定的发电机配合而不能用于其它不同的发电机上。现在建筑工地需要知道在订购发电机究竟应该订购多少个备用的主件？以下资料可供参考：主件与发电机同时订购时为 500 元一件，如果主件损坏而又无备件时，则整个发电机将完全停产，因此所受到的损失再加上特别订购主件的费用之和是 10000 元，以前曾对 100 个同类型的发电机这类主件损坏情况作过统计，资料如表 8-4 所示。

表 8-4

所需备用主件个数	需要第一列个数的发电机数	出现第一列所需数目的概率统计（值）
0	90	0.90
1	5	0.05
2	2	0.02
3	1	0.01
4	1	0.01
5	1	0.01
6 个以上	0	0.00

设存储主件的备件个数为 S，需要使用主件的个数为 n，其相应的概率 $P(n)$ 为已知，且 $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$。于是存储 s 个备件的费用：

（1） 存储费用大于需要，即 $s > n$，这是工地要支付存储费用：

$$(S-n)\bullet C_1$$

（2）需要大于存储，即 $s < n$，这时会造成缺货损失，其费用是：

$$(n-S)\bullet C_2$$

而这必居其一。由于事先不知道 n 的个数，只知道相应于某一个 n 的概率 $P(n)$，因此，也只能获得每一个 n 的相应期望费用：

$$p(n)(S-n)C_1，\text{当 } n < S$$

$$p(n)(n-S)C_2，\quad \text{当 } n > S$$

或若 $n = S$ 时，则期望费用为零。

总期望费用则是关于 n 的一切可能值。先求其相应的期望费用，然后相加而得。综合上述两类情况，关于存储 s 个备件的总期望费用为：

$$C_T = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)(S-n) + C_2 \sum_{n=S+1}^{\infty} p(n)(n-s) \qquad (8\text{-}10)$$

由于计算总期望费用比较繁琐，特别是当n很大而起概率热不为零时，计算工作量仍很大，所以这里采取下列方法求解：

$$\sum_{n=0}^{s-1} p(n) < \frac{C_2}{C_1+C_2} < \sum_{n=0}^{S} p(n) \tag{8-11}$$

现在证明这个不等式：

若存储$s+1$个备件时，有下面关系式：

$$\begin{aligned} C_T(S+1) &= C_1\sum_{n=0}^{S+1} p(n)(S+1-n) + C_2\sum_{n=S+2}^{\infty} p(n)(n-S-1) \\ &= C_1\sum_{n=0}^{s} p(n)(S-n) + C_1\sum_{n=0}^{s} p(n) + C_2\sum_{n=S+1}^{\infty} p(n)(n-S) - C_2\sum_{n=s+1}^{\infty} P(n) \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=S+1}^{\infty} p(n) = 1 - \sum_{n=0}^{S} p(n)$，所以

$$C_T(S+1) = C_T + (C_1+C_2)\sum_{n=0}^{S} p(n) - C_2$$

相似地计算，可得：

$$\begin{aligned} &C_T(S-1) = C_T - (C_1+C_2)\sum_{n=0}^{S-1} p(n) + C_2 \\ &(C_1+C_2)\sum_{n=0}^{S} p(n) - C_2 > 0 \end{aligned} \tag{8-12}$$

$$(C_1+C_2)\sum_{n=0}^{S-1} p(n) + C_2 > 0 \tag{8-13}$$

换个写法：$\sum_{n=0}^{S} p(n) > \frac{C_2}{C_1+C_2}$

$$\sum_{n=0}^{S-1} p(n) < \frac{C_2}{C_1+C_2}$$

即：$\sum_{n=0}^{s-1} p(n) < \frac{C_2}{C_1+C_2} < \sum_{n=0}^{s} p(n)$

当S_0满足下式时$\sum_{n=0}^{s_0-1} p(n) < \frac{C_2}{C_1+C_2} < \sum_{n=0}^{s_0} p(n)$，则有：$C_T(s_0+1) = C_T(S_0)$

此时S_0和S_0+1两个都是S的最优解。同理可由$\sum_{n=0}^{s_0-1} p(n) < \frac{C_2}{C_1+C_2} < \sum_{n=0}^{s_0} p(n)$

得到：$C_T(s_0-1)=C_T(S_0)$

这时 s 的最优解为 s_0 和 s_0-1。

于是利用式（8-2）和下面的表 8-5，就可以解决我们前面所提出的问题。

这里我们设 $C_1=500$ 元，$C_2=10000$ 元

则 $\dfrac{C_2}{C_1+C_2}=\dfrac{10000}{500+10000}=0.952$

有公式 $\sum_{n=0}^{s-1}p(n)<0.952<\sum_{n=0}^{s}p(n)$ 和表 8-5 知，

表 8-5

S	n	$P(n)$	$\sum_0^s P(n)$
0	90	0.90	0.90
1	5	0.05	0.95
2	2	0.02	0.97
3	1	0.01	0.98
4	1	0.01	0.99
5	1	0.01	1.00
6 个以上	0	0.00	1.00

S 的最有值为 2，即 $s_0=2$。

3．需求是随机连续的

该问题与前面介绍的随机存储模型的不同之处，仅在于物资的需求量 x 是连续变量。假设 n 的概率密度函数为 $f(x)$，则物资的需要量在 x_1 与 x_2 二数之间的概率可用积分表示：

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

需要量小于或等于某一数量 S 的概率是：

$$\int_0^s f(x)dx=F(s)$$

这里费用方程的导出与前面提到的相似，我们只讲方程式（8-10）中的 $p(n)$ 换成 $f(x)dx$，再将符号 $\sum$ 换积分号就行了。

$$C_T=C_1\int_0^s(s-x)f(x)dx+C_2\int_s^{\infty}(x-s)f(x)dx \qquad (8\text{-}19)$$

当 S 的合理值满足条件

$$F(S)=\int_0^s f(x)dx=\frac{C_2}{C_1+C_2} \qquad (8\text{-}20)$$

时，C_T 达最小。

则（8-20）式可以写成

$$\frac{F(s_0)}{1-F(s_0)}=\frac{C_2}{C_1} \qquad (8\text{-}21)$$

该式的实际意义是，在最优的情况下，需求比最优存储水平的概率与需求比存储水平达

概率之比，等于单位缺货被单位存储费除之。

8．4 带有限制条件的存储问题

前面所讨论的确定性存储和随机性存储等问题，都没有考虑任何生产设备、仓库容积、时间、资金等方面的限制，而实际工作中却不同程度地存在着这些限制。当产品种类不一样，就必须考虑在有关限制条件下，利用有限资源，寻求获得尽可能大的经济效益的途径，这里主要是求得各种产品的经济批量问题。

如果工厂生产的产品成本包括以下几个部分：

1．产品的原料和工资;

2．每批产品的安装费；

3．存储费。

于是我们可以假设：

R_i——表示 A_i 产品的月销量（假设为已知的常数，$i=1,2,\cdots$）

C_{ic}——表示每批 A_i 产品的安装费；

C_{i3}——单位 A_i 产品的原料，工资等费用；

q_i——每批 A_i 产品的产量；

c_{i1}——月存储费率，以存储价值的百分数表示。

例如产品价值为 100 元，c_{i1}=2%，则月存储费为 2 元。

假设每批 A_i 产品的安装费、原料费和工资的总和为 $C_{i1}+q_iC_{i3}$，每月生产 A_i 产品的批数为 R_i/q_i，所以每个月的安装费、原料费和工资的总和为：

$$\frac{R_i}{q_i}(C_{ic}+q_iC_{i3})=\frac{R_i}{q_i}C_{ic}+R_iC_{i3}\ R_1R_2$$

每批 A_i 产品的平均 F 存储量为 $q_i/2$，每批 A_i 产品的平均价值为：$\frac{q_i}{2}\left(\frac{C_{ic}}{q_i}+C_{i3}\right)$，则每批产品 q_i 的月存储费为：$\left(\frac{C_{ic}+q_iC_{i3}}{2}C_{i1}\right)$，于是 A_i 产品的月成本为：

$$C_{Ti}=\frac{R_i}{q_i}C_{ic}+R_iC_{i3}+C_{i1}\left(\frac{C_{ic}+C_{i3}q_i}{2}\right)$$

所有产品的总预期成本为：

$$C_T=\sum_{i=1}^{m}C_{Ti}=\sum_{i=1}^{m}\frac{R_iC_{ic}}{q_i}+\sum_{i=1}^{m}R_iC_{i3}+\sum_{i=1}^{m}\frac{C_{i1}C_{ic}}{2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{C_{i1}q_iC_{i3}}{2} \qquad (8\text{-}22)$$

为了寻求极小化的总成本，假设q_i是可微变量，则：$\frac{\partial C_T}{\partial q_i}=-\frac{R_iC_{ic}}{q^2{}_i}+\frac{C_{i1}C_{i3}}{2}$

使偏导数为零，可得：$q^0{}_i=\sqrt{\frac{2R_iC_{ic}}{C_{i1}C_{i3}}}\qquad i=1,2,\cdots,m$ （8-23）

于是，当$q_i=q_i{}^0$时，C_T可达到极小化。

现在讨论仓库容积这一限制条件问题。

设每批产品中A_i产品的产品的产量为q_i，它所需用的仓库容积称为q_iW_i，其中W_i为单位A_i产品需要占的容积，如果仓库容积为V,则必须有：

$$\sum_i q_iW_i\leq V \tag{8-24}$$

如果出现 $\sum_{i=1}^m q_iW_i>V$ 时，则必须减少小q_i的生产量，为此，我们定义一个参数λ：

当$V-\sum_{i=1}^m q_iW_i=0,\lambda<0$

当$V-\sum_{i=1}^m q_iW_i>0,\lambda=0$

当$V-\sum_{i=1}^m q_iW_i<0$时，不允许存在，

则 $\lambda(V-\sum_{i=1}^m q_iW_i)=0$

代入（8-22）式，其总期望成本不变：

$$C^T=\sum_{i=1}^m\frac{R_iC_{ic}}{q_i}+\sum_{i=1}^m R_iC_{i3}+\frac{C_{i1}}{2}\sum_i C_{ic}+\lambda(V-\sum_i q_iW_i) \tag{8-25}$$

令 $\frac{\partial C_T}{\partial q_i}=0,$ 则 $-\frac{R_iC_{ic}}{q^2{}_i}+\frac{C_{i1}C_{i2}}{2}-\lambda W_i=0$

由于$\frac{\lambda^2C_T}{\lambda q_i{}^2}>0$，所以：$q_i{}^0=\sqrt{\frac{2R_iC_{ic}}{C_{i1}C_{i3}-2\lambda W_i}}\qquad i=1,2,\cdots,m$ （8-26）

根据（8-26）式，给出不同的λ数值，可以得到相应的q_i和$\sum q_iW_i$值，并根据（8-24）式这一限制条件，最后定下来A_i产品的生产量q_i。

例 8．3 某混凝土预制厂生产两种产品A_1和A_2，每月的销售量R_1，R_2已知且为常数，相应的安装费、存储费和原材料、工资等费用都已知，如表 8-7 所示，试求：（1）

使总成本最低的产量；

（2） 在仓库容积为 23000 m^3, A_1, A_2 单位产品需占库存容量分别为 5 m^3 和 35 m^3，这时的产量如何控制？总期望为多少？

表 8-7

产品	R_i（件/月）	C_{ic}（元/批）	C_{i3}（元/件）	C_{i1}
A_1	200	100	12	0.005
A_2	400	250	7	0.005

解：（1）根据公式（8-23）得：

$$q^0{}_1 = \sqrt{\frac{2\times200\times100}{0.005\times12}} = \sqrt{666666.7} = 816$$

$$q^0{}_2 = \sqrt{\frac{2\times400\times25}{0.005\times7}} = \sqrt{571428.8} = 756$$

代入（8-23）式：

$$\begin{aligned} C_T &= (\frac{200\times100}{816} + \frac{400\times25}{756}) + (200\times12 + 400\times7) \\ &+ \frac{0.005}{2}\times(100+25) + \frac{0.005}{2}\times(816\times12 + 756\times7) \\ &= (24.51+13.23) + 5200 + 0.31 + 37.71 = 5275.75 \end{aligned}$$

（2）由（8-26）、（8-24）式和 $\lambda \le 0$，设置不同的 λ 值，计算出相应的 $q_1{}^0$，$q_2{}^0$ 和 $\left(q_1{}^0W_1 + q_2{}^0W_2\right)$，选择适合要求的 $q_1{}^0$ 和 $q_2{}^0$，计算过程见表 8-8。

表 8-8

λ	$q_1{}^0$	$q_2{}^0$	$5q_1{}^0+35q_2{}^0$	备注
-0.0000	816	756	30540> V	V=23000 m^3
-0.0001	810	690	28200> V	
-0.0002	803	677	27710> V	
-0.0003	797	599	24930> V	
-0.0005	784	535	22645<V	√

由表可知，当 $\lambda = -0.0005$ 时，$5q_1{}^0+35q_2{}^0$=22645<23000=V

于是得到，在总库容为 23000 m^3 的限制条件下，A_1 的产量为 784 件/批，A_2 为 535 件/批。这时的总费用为：

$$C_T=\left(\frac{200\times100}{784}+\frac{400\times25}{535}\right)+(200\times12+400\times7)$$

$$+\frac{0.005}{2}\times(100+25)+\frac{0.005}{2}\times(784\times12+535\times7)$$

=5277.39（元）

得出结论：(1）在无其他的约束条件下，A_1，A_2的批产量分别为 816 件和 756 件，其最低费用为 5275.75 元。(2）在仓库容积为 23000 m^3 的条件下，A_1，A_2 的批产量分别为 784 件和 535 件，最低费用为 5277.39 元。