第 10 章 对策论

10.1 基本概念

对策论也称博弈论，是研究具有竞争或斗争性质的现象，并为参加者各方提供对策方法的数学理论，它是运筹学的一个分支。对策自古有之，只是在科学技术高度发展的现代社会，更进一步引起越来越多人的重视和研究。

在人类社会中，人们正常生产劳动、工作、学习之余，可能去下棋、打扑克，或者去玩各自所喜爱的乒乓球、羽毛球，或者参加其他体育比赛，或者做各种游戏等等。在这些具有竞赛或斗争性质的活动中，人们总希望自己或自己一方最终夺得胜利，或者获得尽可能好的结局。因此，都积极寻找有利时机，施展自己的才智，制约、干扰和破坏对方长处或优势的发挥。

我们把这种按照不同情况、根据不同对手、采取不同对待方法，以期比赛或斗争有利于自己的现象，称为“ 对策现象 ”。

在政治领域里，国与国之间的战争，国家内部政治集团之间的斗争，更是一种你死我活的对策现象。

在经济活动中，国家之间的贸易谈判，公司或企业之间的交往、国际或国内的市场争夺，都明显地表现出对策的特性。

“ 对策现象 ”绝非仅此种种，但是无论何种对策，构成一个对策现象的共同特征是具有三个基本要素：

10.1.1 局中人

在一场竞赛或斗争中（简称一局对策），都必须有这样的参加者，他们为了在一局对策中力争好的结局，必须制定对付对手的行动方案，我们把这样有决策权的参加者称为“ 局中人 ”。例如下象棋的双方。应当注意把那些利害一致的参加者看作一个局中人，例如打桥牌的东西双方（或南北两人），因为他们得失相当，都必须齐心合力，行动一致，如同一人。所以虽然有四人参加打牌，只能视为两个局中人。在一局对策中，即不用决策，且结局又与之无关的人不算局中人，就像球赛的裁判、游戏的公证人等。

正是由于局中人的多少不同，才有“ 二人对策 ”和“ 多人对策 ”之分，还可以根据局中人的合作关系分为“ 结盟对策 ”和“ 不结盟对策 ”等。

10.1.2 策略

参加对策的每个局中人，每行动一步都有若干个行动方案可供选择，而在整个对策过程中，他们又必须考虑一个指导自始至终的行动方案，每个局中人的这种指导自始至终的行动方案也有若干。我们把一个局中人的一个可行的指导自始至终的行动方案称为

这个局中人的一个策略，而把这个局中人的策略全体，叫做这个局中人的策略集合。一个局中人的策略集合中至少有两个策略或者多个策略，甚至无穷个策略。据此，可以把对策分为“有限对策”或“无限对策”。

10.1.3 赢得（支付）函数

一局对策结束时，对每个局中人来说，结果总是肯定的。可能以胜利或失败的形式反映，也可能表示为比赛名次的前后，还可表现为实物收入的多少等等。我们称这样的结果为“赢得”，也可称为“支付”。

一局对策结束时，每个局中人的“赢得”和全体局中人各选取的策略所组成的策略组有关，即是该策略组的函数，通常称为“赢得函数”（“支付函数”）。

根据一局对策结束后每个局中人的“赢得”相加之和等于零与否，我们把对策分为“零和对策”或“非零和对策”。

10.2 矩阵对策

矩阵对策就是有限零和二人对策，指的是参加对策的局中人只有两方（或二人），每一方局中人的可供选择策略数是有限多个，而且每一局对策结束时，一方的收入（或赢得）等于另一方的支出（或称输出），换句话说，二方得失之和总是等于零。这类对策比较简单，理论上也比较成熟，在实践中应用的也极为广泛。由于矩阵对策的理论奠定了研究“对策现象”的基本思路，所以它是对策论中必须掌握的内容。

10.2.1 矩阵对策的数学模型

对于矩阵对策，我们用甲、乙表示两个局中人，假设甲有 m 个策略（又称纯策略），分别以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示，乙有 n 个策略，分别以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 表示。根据对策规定，若甲选用第 i 个策略，乙选用第 j 个策略，则称 (α_i,β_j) 为一个纯局势，那么，甲的赢得可以用 α_{ij} 表示(若 α_{ij} 是负数时，表示甲是支出而不是收入)。于是，甲的支付可以列成表 10-1。

甲的支付表 **表 10-1**

甲的支付 / 乙的策略 / 甲的策略	β_1	β_2	---	β_j	---	β_n
α_1	α_{11}	α_{12}	---	α_{1j}	---	α_{1n}
α_2	α_{21}	α_{22}	---	α_{2j}	---	α_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
α_i	α_{i1}	α_{i2}	---	α_{ij}	---	α_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
α_m	α_{m1}	α_{m2}	---	α_{mj}	---	α_{mn}

由于讨论的是有限零和二人对策，所以甲的收入就是乙的支出。那么，乙的支出表可在甲的支付表中每个α_{ij}之前加一个负号得到。

如果仅考虑支付表中的数值α_{ij}，便可以得到一个矩阵 A，称为甲的支付矩阵（或叫赢得矩阵）：

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

一般可写成

$$A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$$

或

乙的支付矩阵为：

$$B=\begin{bmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1j} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2j} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{i1} & -\alpha_{i2} & \cdots & -\alpha_{ij} & \cdots & -\alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \cdots & -\alpha_{mj} & \cdots & -\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$B=(-\alpha_{ij})_{m\times n}$$

若用S_1表示甲的策略集合，即

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

以S_2表示乙的策略集合：

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$$

则甲、乙的有限零和二人对策可表示成：

$$G=\{S_1,S_2,A\}$$

例如，甲乙两个小孩做猜拳游戏，分别以拳头、两个指头、伸直五指的手掌代表石头、剪刀、布，并规定石头砸（赢）剪刀，剪刀剪（赢）布，布包（赢）石头，且赢者得 1，输者得-1，于是小孩甲的支付表如表 10-2 所示 。

表 10-2

乙的策略 / 甲的支付 / 甲的策略	石头	剪刀	布
石头	0	1	-1
剪刀	-1	0	1
布	1	-1	0

甲乙两个小孩的猜拳游戏（对策）可表示成：

$$G=\{S_1,S_2,A\}$$

其中 $S_1=S_2=${剪刀、石头、布}

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

10.2.2 最优纯策略和极大极小原理

设有矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$

其中：

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$$

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

$$A=\begin{pmatrix}8 & 0 & -5\\ -3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

就局中人甲来说，对于他的四个纯策略，希望赢得分别是 8，2，4，2，即他的希望赢得，都是他的各纯策略中的最大值，而甲最希望赢得是 8。对于局中人乙来说，他拿出三个纯策略回答进行对策时，希望支付分别是-3，-1，-5，即乙希望他的支付都是各策略中的最小值，其中-5 是乙最希望的支付。

但是，每个局中人选择策略的行动都要受到对方的干扰或制约。当甲希望赢得 8 而选择纯策略 α_1 时，乙会考虑到甲的这种心理状态，所以乙可能采取他的纯策略 β_3，使甲得不到 8 而失去 5（即得到-5）。不过这仅仅是推测，究竟对方要采用哪个纯策略进行对策活动，双方都不知道，在这种情况下，决定自己的策略结果是赢还是输难以估计。因此，甲乙双方都必然要考虑，选择自己的哪一个纯策略才是可靠的？显而易见，甲的纯策略 α_1 的可靠赢得（即最小赢得）是-5，不可能再小，甲的纯策略 α_2，α_3，α_4 的可靠赢得分别是-3，2，-3；类似的道理，乙的纯策略 β_1，β_2，β_3 得可靠支付（即最大支

付）分别是 8，2，3，不可能超过这些数值。甲乙双方进行对策时，分别赢得或支付的结果见表 10-3。

表 10-3

甲的支付 乙的策略 / 甲的策略	β_1	β_2	β_3	甲的希望赢得	甲的可靠赢得	甲的最优赢得
α_1	8	-1	-5	8	-5	
α_2	-3	1	2	2	-3	
α_3	4	2	3	4	2	2
α_4	-3	-1	2	2	-3	
乙的希望赢得	-3	-1	-5	最优纯策略（α_3， β_2）		
乙的可靠赢得	8	2	3			
乙的最优赢得		2				

局中人在分析了可靠赢得（或支付）之后，符合逻辑地都会想到最优赢得（或最优支付）问题。可以看出，甲的可靠赢得数值中最大者为 2，成为他的最优赢得值；而乙的最优支付值则是他的可靠支付值中最小者 2。

可以看出，任何一方局中人都在集中精力关心一件事，即在对方采取的策略对自己来说是最不利时，可能发生最坏的事态，这时要采取措施，从最坏的事态中寻找最好的结果。

很显然，在有把握的对策情况下，甲选择策略的原则是，首先在每个纯策略（行）中找出最小值（可靠赢得），即

$$\min_j \alpha_{ij} = \alpha_{ij^*} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

然后在这些最小值中找到最大值（最优赢得），

即：

$$\max_i(\min_j \alpha_{ij}) = \max_i \alpha_{ij^*} = V_1$$

在本对策G中，$V_1 = 2$

局中人乙则和甲相反，他的原则首先是在各纯策略（列）中找出最大值（可靠支付）：

$$\max_i \alpha_{ij} = \alpha_{i^*j} \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

然后再找出各最大值中的最小值（最优支付）

$$\min_j(\max_i \alpha_{ij}) = \min_j \alpha_{i^*j} = V_2$$

这里$V_2 = 2$

我们把甲的最优赢得和乙的最优支付的这个公共值，称为矩阵对策的值，记作V_G，即：

$$V_G = \max_i(\min_j \alpha_{ij}) = \min_j(\max_i \alpha_{ij})$$

这里：$V_G = 2$。

这是矩阵对策在纯策略下有解的充分必要条件，是著名的求解矩阵对策的极大极小原理。一般来说，当甲选择他的第 i 个纯策略时，已经考虑到最优赢得，所以他的赢得不可能比V_1再小，因此称V_1为对策的下值；当乙选择他的第 j 个纯策略和甲对局时，同样预计了最优支付问题，这时甲的赢得是V_2，不可能比V_2大，因此称V_2为对策的上值。所以有人把极大极小原理写成下面不等式形式：

$$V_1 \le V_G \le V_2$$

相应于对策值V_G的策略（α_3和β_2）称为局中人（甲、乙）的最优纯策略，记作：

$$a_i^* \qquad \beta_{\mathrm{j}}^*$$

由最优纯策略组成的对策局势称为最优局势，记为：

$$(a_i^*, \beta_j^*)$$

并且称(a_i^*, β_j^*)为矩阵对策G的“鞍点”，称$V_1 = V_2$的矩阵对策为完全确定对策。

现在给出在纯策略中有解的（极大极小）定理及其证明，作为这个问题的结束语。

定理 10.2-1　矩阵对策$G = \{S_1, S_2, A\}$在纯策略中有解的充要条件是，存在一个纯局势(a_i^*, β_j^*)，使得对一切 i=1,2,…,m，j=1,2,⋯，n，都有

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

证明：充分性由于一切 i，j 均有

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

故有：

$$\max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \text{和} \ a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}$$

所以

$$\max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}$$

而

$$\min_j \max_i a_{ij} \le \max_i a_{ij^*}$$

$$\min_j a_{ij^*} \le \max_i \min_j a_{ij}$$

从而得：

$$\min_j \max_i a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j a_{ij}$$

另外有：

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$$

于是得：
$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

必要性：既然对策 G 有解，假设 $\min_j a_{ij}$ 在 $i = i^*$ 时达到最大，$\max_i a_{ij}$ 在 $j = j^*$ 时达到最大，即：

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}$$

而
$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

故有：

$$a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \geq a_{ij^*}$$

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j}$$

于是得
$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

对于一切 i=1,2,…,m，j=1,2,⋯，n 成立。证毕。

10.2.3 混合策略

除前面所述情况外，还会遇到无鞍点的矩阵对策。例如对策矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

则甲、乙双方的可靠赢得和可靠支付如表 10-4 所示。

这里：$V_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -2$

$$V_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 3$$

$$V_1 \neq V_2$$

表 10-4

乙 / 甲	β_1	β_2	甲的可靠赢得
α_1	3	-2	-2
α_2	-4	5	-4
乙的可靠支付	3	5	

显然，极大极小原理在这里不适用了，即在纯策略情况下，这类矩阵对策没有解，两个局中人都没有最优纯策略。

面对这种情况，局中人应如何选择纯策略呢？通常采用被称为混合策略进行对局。所谓混合策略，就是局中人为了预防对方识破自己的行动，按照一定概率分布随机地选择各个纯策略。这时，局中人的赢得被称作“ 期望赢得 ”。

对本例来说，如果局中人甲以概率 p_1 选取纯策略 α_1，以概率 p_2 选取纯策略 α_2；局中人乙则以概率 q_1 选取纯策略 β_1，以概率 q_2 选取纯策略 β_2，在这里 $p_2 = 1 - p_1$，$q_2 = 1 - q_1$ 。于是甲的期望赢得为：

$$
\begin{aligned}
V_G &= E(p,q) \\
&= 3p_1q_1 + (-2)p_1q_2 - 4p_2q_1 + 5p_2q_2 \\
&= 3p_1q_1 + (-2)p_1(1-p_1) - 4(1-p_1)q_1 + 5(1-p_1)(1-p_1) \\
&= 14p_1q_1 - 7p_1 - 9q_1 + 5 \\
&= 14(p_1 - \frac{9}{14})(q_1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

可以看出，甲的期望赢得是$\frac{1}{2}$。由于当甲以概率 $p_1 = \frac{9}{14}$ 选取纯策略α_1时，其期望赢得至少是$\frac{1}{2}$，然而，他并不能保证超过这个赢得值，因为局中人乙可以用$\frac{1}{2}$概率选取纯策略β_1，这时甲的期望赢得值决不会超过$\frac{1}{2}$。

所以，该例中局中人甲的最优（混合）策略为 $p = \{p_1, p_2\} = \left\{\frac{9}{14}, \frac{5}{14}\right\}$，局中人乙的最优（混合）策略是$q = \{q_1, q_2\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$，其对策值为$V_G = \frac{1}{2}$。

不难发现，对于无鞍点的矩阵对策有：

甲的混合策略为 $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0$$

乙的混合策略为$q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0$$

对策值为

$$V_G = E(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

10.3 矩阵对策的解法

由前所述，矩阵对策分为有鞍点对策与无鞍点对策两大类别，对于有鞍点的矩阵对策，其解法极为简单，即应用极大极小原理，可方便的出对策值V_G，那么和对策值相对应的纯策略α_i和β_j，就是局中人甲、乙的最优纯策略。所以，对于这一类对策，在此不再讨论，这里仅讨论无鞍点矩阵对策的解法。

10.3.1 矩阵对策的解法

假设无鞍点矩阵对策：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

其对策值V_G，局中人甲、乙双方的混合策略为：

$p=\{p_1,p_2\},q=\{q_1,q_2\}$，于是有：

$$a_{11}p_1q_1+a_{12}p_1q_2+a_{21}p_2q_1+a_{22}p_2q_2=V_G$$

即 $$p_1(a_{11}q\ \ +a_{12}q_2)+p_2(a_{21}q_1+a_{22}q_2)=V_G$$

由于 $$p_i>0,p_1+p_2=1,a_{11}q_1+a_{12}q_2=V_G$$

$$a_{21}q_1+a_{22}q_2=V_G$$

同理，根据$q_j>0,q_1+q_2=1$，可以得到：

$$a_{11}p_1+a_{21}p_2=V_G$$

$$a_{12}p_1+a_{22}p_2=V_G$$

于是，我们可以利用以上方程组，求出甲、乙双方的最优混合策略和相应的对策值。

假设，甲、乙双方的对策矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

求解双方的最优混合策略。

解：根据对策矩阵，列出方程组：

$$\begin{cases} 3p_1+5p_2=V_G \\ 4p_1+2p_2=V_G \\ p_1+p_2=1 \end{cases}$$

解得$V_G=\dfrac{7}{2}$， $p_1=\dfrac{3}{4}$， $p_2=\dfrac{1}{4}$。

由方程组： $$\begin{cases} 3q_1+4q_2=V_G \\ 5q_1+2q_2=V_G \\ q_1+q_2=1 \end{cases}$$

解得：$q_1=\dfrac{1}{2}$， $q_2=\dfrac{1}{2}$，

故，局中人甲的最优混合策略 $p=\left\{\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right\}$，

局中人乙的最优混合策略为 $q=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

对策值为： $V_G=\frac{7}{2}$

10.3.2 矩阵对策图解法

在矩阵对策中，一个局中人只有两个纯策略者，是 2×2 矩阵对策以外最简单的对策，这里仅考虑 2×n 对策，相似地也可以求解 m×2 矩阵对策。

对于第一个局中人甲来说，他所希望的是下面最小中的最大者：

$$V_G=\min_j\{a_{1j}p_1+a_{2j}p_2\}$$

由 $p_1=1-p_2$

则：$V_G=\min_j\{(a_{2j}-a_{1j})p_2+a_{1j}\}$

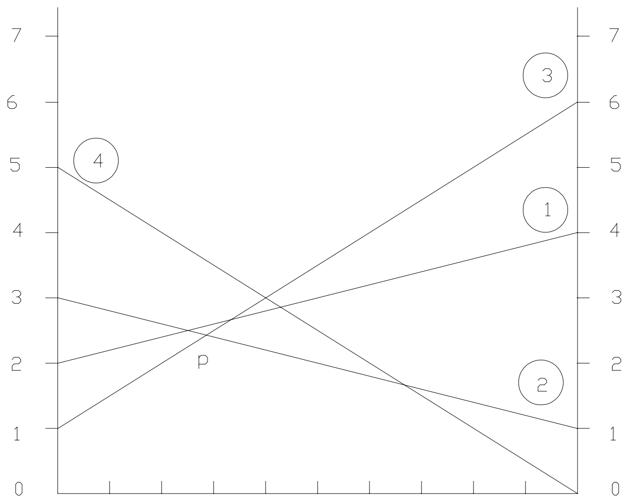

图 10-1

例：甲方的赢得矩阵为：

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 5\\4 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

首先作图。在横坐标轴上截取长度为 1 的线段，并在 0、1 处分别作横坐标的垂直线，然后取 $p_2=0$、再取 $p_2=1$、分别画出赢得矩阵之各列数的图象，见图 10-1。

图中加粗的折线表示局中人甲的各最小赢得，而 p 点则是各最小赢得的最大值。它是第 2 列和第 3 列图象之交点。于是根据：

$$V_G(p)=5p_2+1$$

$$V_G(p)=-2p_2+3$$

求得：$$p_2=\frac{2}{7},\text{则 } p_1=\frac{5}{7},V_G=\frac{17}{7}。$$

所以，局中人甲的最优混合策略是 $p=\left\{\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right\}$ 其期望赢得为 $\frac{17}{7}$。和甲的最优混合策略相关联很容易求得局中人乙的最优混合策略是：

$$Q=\left\{0,\frac{5}{7},\frac{2}{7},0\right\}。$$

10.3.3 m×n 矩阵对策的解法

定义：对于矩阵 A，如果 $a_{ij}\geq a_{Kj}$ （对于所有的 j）

且 $a_{ij}>a_{Kj}$ （至少有一个 j）

则称第 i 行优越于第 K 行，同理如果：

$a_{ij}\leq a_{iL}$ （对于所有的 i）

且 $a_{ij}<a_{iL}$ （至少有一个 i）

则称第 j 列优越于第 L 列。

定理 10.3-1 若矩阵对策 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_K$（纯策略）行被优超，则局中人甲在选取最优策略时，必然采取 $p_{i1}=p_{i2}=\cdots=p_{iK}=0$，并且，根据画掉被优超的行（或列）而得到的最优策略，也就是原矩阵对策 A 的最优策略（这里不加证明）。

根据这一定理，对于高阶矩阵对策，可以首先进行化简，即画去被优超的行或列，使原高阶矩阵对策化为较低阶的矩阵对策，以便最优策略的选择和求解。

高阶矩阵对策化简后再进行求解

现在考虑如下矩阵对策的求解问题

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

首先进行化简、分析被优超的行或列。很明显，第四列各元素都分别大于第二列各元素，故第四列被优超、可以画掉，于是矩阵变为：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

在画掉第四列的矩阵内，第三行的各元素都分别大于第一行的各元素，所以第一行被优超，又可以画掉：

$$\begin{bmatrix} \underline{2 \quad 0 \quad 1} \\ 1 \quad 2 \quad 5 \\ 4 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix}$$

在未被画掉的元素组成的 2×3 阶矩阵中，第三列各元素（5 和 3）又大于第二列各元素（2 和 1），于是第三列又画掉：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

最后，矩阵被化简为 2×2 阶阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

对于这样的矩阵对称，可以按照前面所述方法进行求解。

2．不可简化的高阶矩阵对策之线性规划解法

设有矩阵对策 $A=(a_{ij})$，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

假设该矩阵对策值为，则求解它就是解下列两个不等式组：

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}p_2+\cdots+a_{m1}p_m \geq V_G \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\cdots+a_{m2}p_m \geq V_G \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\cdots+a_{mn}p_m \geq V_G \\ p_1+p_2+\cdots+p_m=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{12}q_2+\cdots+a_{1n}q_n \leq V_G \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+\cdots+a2nq_n \leq V_G \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+\cdots+a_{mn}q_n \leq V_G \\ q_1+q_2+\cdots+q_n=1 \end{cases}$$

就是矩阵对策的基本定理。

定理 10.3-2　任何一个给定的矩阵对策 G（在混合策略中）一定有解，如果对策值为 V_G，则上面两个不等式组的解就是局中人甲和乙的最优策略。

上面两个不等式组可以简写成：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V_G \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V_G \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0 \end{cases}$$

将线性方程组作适当变化，不妨设$V_G > 0$，使

$$x_i = \frac{p_i}{V_G} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$y_j = \frac{q_j}{V_G} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

则有：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{V_G} \\ x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} y_j = \frac{1}{V_G} \\ y_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

于是，对局中人甲而言，他希望尽可能大的值，即使$\frac{1}{V_G} = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$达到极小；同样，对乙来说，使$\frac{1}{V_G} = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$达到极大。所以，问题可以化为两个线性规划问题来处理：

(1) 求$x_1, x_2, \cdots, x_m$,在满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

约束条件下，使

$$f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \qquad \text{取极小值。}$$

(2)求一组变数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \\ y_j \geq 0 \end{cases}$$

的要求下，使目标函数

$$f(y) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \quad \text{达到极大。}$$

例题：设有矩阵对策

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

试求局中人甲、乙双方的最优策略。

解：将问题归结为如下两个线性方程组：

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 + 5p_3 \geq V_G \\ 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 \geq V_G \\ 3p_1 + 4p_2 + 2p_3 \geq V_G \\ p_1 + p_2 + p_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 3q_3 \leq V_G \\ 2q_1 + 3q_2 + 4q_3 \leq V_G \\ 5q_1 + 4p_2 + 2p_3 \leq V_G \\ q_1 + q_2 + q_3 \leq 1 \end{cases}$$

令 $$x_i = \frac{p_i}{V_G} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$y_j = \frac{q_j}{V_G} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

则得到：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3\geq 1\\2x_1+3x_2+4x_3\geq 1\\3x_1+4x_2+2x_3\geq 1\\x_i\geq 0\qquad(i=1,2,3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}3y_1+2y_2+3y_3\leq 1\\2y_1+3y_2+4y_3\leq 1\\5y_1+4y_2+2y_3\leq 1\\y_j\geq 0\qquad(j=1,2,3)\end{cases}$$

因为局中人甲要求 V_G 尽可能大，乙则想使 V_G 尽可能小，所以对策问题可以化为如下两个线性规划问题：

(1)求 $x_i(i=1,2,3)$ 满足：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3\geq 1\\2x_1+3x_2+4x_3\geq 1\\3x_1+4x_2+2x_3\geq 1\\x_i\geq 0\qquad(i=1,2,3)\end{cases}$$

使 $f(X)=x_1+x_2+x_3$ 达极小。

(2)求 y_1,y_2,y_3 满足：

$$\begin{cases}3y_1+2y_2+3y_3\leq 1\\2y_1+3y_2+4y_3\leq 1\\5y_1+4y_2+2y_3\leq 1\\y_j\geq 0\qquad(j=1,2,3)\end{cases}$$

使 $f(Y)=y_1+y_2+y_3$ 达极大值。

现在应用单纯形法，求得：

$$x_1=0,x_2=\frac{3}{16},x_3=\frac{1}{8}$$

$$V_G=\frac{1}{x_1+x_2+x_3}=\frac{16}{5}$$

于是： $p_1=0,p_2=\frac{16}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{5},p_3=\frac{16}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{2}{5},$ 所以，局中人甲的最优混合策略是 $p=\left\{0,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right\}$ 相应的对策值 $V_G=\frac{16}{5}$。

应用同样方法可以求得局中人乙的最优混合策略为：$q=\{q_1,q_2,q_3\}=\left\{\frac{2}{5},0,\frac{3}{5}\right\}$。